5 Transformée de Laplace

L'étude des systèmes s'accompagne inévitablement de la manipulation d'équations différentielles. Leur résolution permet la détermination des régimes *transitoire* et *permanent* du système dynamique. Or les opérations liées à cette manipulation sont souvent délicates et la résolution des équations n'est pas toujours simple. Pour faciliter les calculs, on utilise un outil mathématique puissant : la transformée de Laplace.

5.1 Définition

Soit $f(t)$ une fonction causale, la transformée de Laplace de $f(t)$ est définie par :

$$\boxed{L(f(t)) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt \qquad p = \sigma + j.\omega \text{ est une variable complexe}}$$

La transformée de Laplace est toujours une fonction de p seul, l'opérateur p n'a pas de signification physique. On dit que *F(p)* est la transformée de Laplace de *f(t)* et que c'est *l'image* de *f(t)* dans le domaine *symbolique*. On dit par « symétrie » que *f(t)* est l'original de *F(p)* et que c'est *l'image de* $F(p)$ dans le domaine *temporel*.

5.1.1.1 Exemple 1

Soit $f(t) = A$, pour trouver sa transformée de Laplace, cette fonction mathématique doit modéliser un phénomène physique causal (nul pour $t<0$), on doit donc la remplacer par $f(t)\cdot u(t)$ comme illustré par la Figure 50

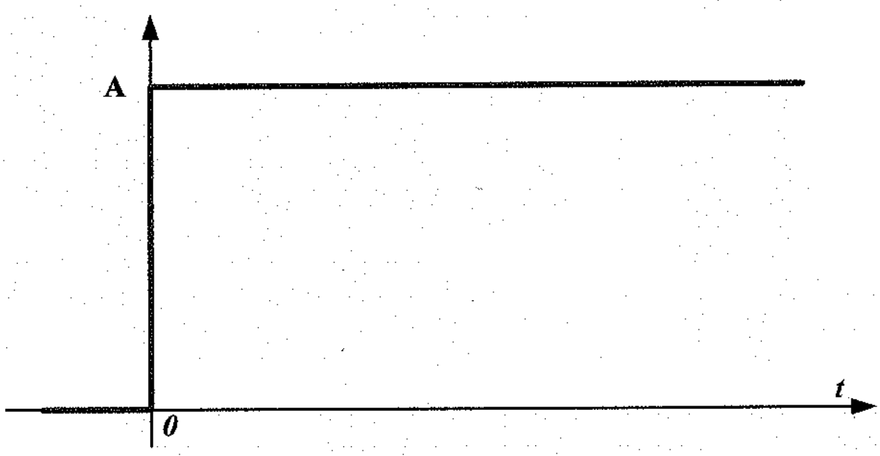


Figure 50 A.u(t)

Sa transformée de Laplace est alors $F(p) = \int_0^\infty e^{-p\cdot t} \cdot A \cdot u(t) \cdot dt = -\frac{A}{p} \cdot \left[e^{-p\cdot t}\right]_0^\infty$

Sachant que pour $t \to \infty$, $e^{-p\cdot t} \to 0$ et sachant que pour $t = 0$, $e^{-p\cdot t} = 1$, on conclut que :

$$\boxed{L(A) = \frac{A}{p}}$$

5.1.1.2 Exemple 2

Soit $f(t) = e^{-a.t}$, fonction exponentielle, cette fonction doit être nulle pour $t < 0$, on peut donc la remplacer par $f(t).u(t)$ comme illustré par la Figure 51

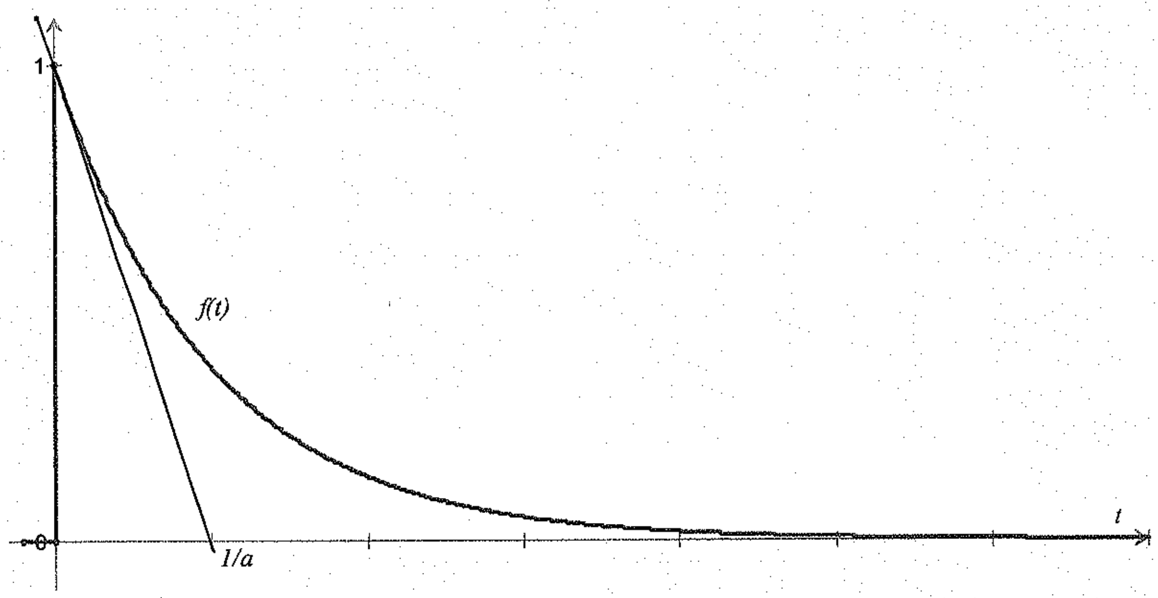


Figure 51 $\mathbf{e^{-a.t}.u(t)}$

Sa transformée de Laplace

est $F(p) = \int_0^\infty e^{-p.t} \cdot e^{-a.t} \cdot u(t) \cdot dt = \int_0^\infty e^{-(p+a).t} \cdot dt = -\frac{1}{p+a} \cdot \left[e^{-(p+a)t} \right]_0^\infty$

Sachant que pour $t \to \infty$, $e^{-(p+a).t} \to 0$ et sachant que pour $t = 0$, $e^{-(p+a)t} = 1$, on conclut que :

$$\boxed{L(e^{-a \cdot t}) = \frac{1}{p+a}}$$

5.1.1.3 Remarque

Sous le signe intégral, la fonction *u(t)* disparaît parfois, ceci est licite puisque les bornes d'intégration imposent aussi que la fonction soit causale.

5.2 Propriétés de la transformée de Laplace

5.2.1 Multiplication par une constante - Homogénéité

Soit $f(t)$ une fonction causale et a une constante.

$$L(a \cdot f(t)) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot a \cdot f(t) \cdot dt = a \cdot \int_0^\infty e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt = a \cdot L(f(t))$$

La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ causale multipliée par une constante est égale à la transformée de Laplace de cette fonction multipliée par la constante.

$$\boxed{L(a \cdot f(t)) = a \cdot L(f(t))}$$

5.2.1.1 Remarque

L'image de 0 est 0.

5.2.2 Somme de fonctions - Additivité

Soit $f(t)$ une fonction causale. Par définition, on pose $f(t)$ résultant de la somme de deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ causales. Calculons la transformée de Laplace de $f(t)$ en fonction des transformées de $f_1(t)$ et $f_2(t)$.

$$L(f(t)) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot (f_1(t) + f_2(t)) \cdot dt = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot f_1(t) \cdot dt + \int_0^\infty e^{-pt} \cdot f_2(t) \cdot dt$$

Donc, la transformée de Laplace d'une somme de fonctions est égale à la somme des transformées de Laplace de chacune des fonctions. Ce résultat se généralise à n fonctions, quel que soit le nombre n.

$$\boxed{L(f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_n(t)) = L(f_1(t)) + L(f_2(t)) + \ldots + L(f_n(t))}$$

5.2.2.1 Exemple 1

Calculons les transformées des fonctions $\sin(\omega \cdot t)$ nulle si $t<0$ et $\cos(\omega \cdot t)$ nulle si $t<0$ en utilisant la propriété de superposition.

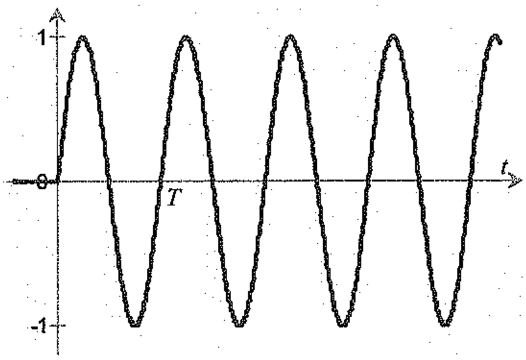


Figure 52 **sin(ω.t) . u(t)**

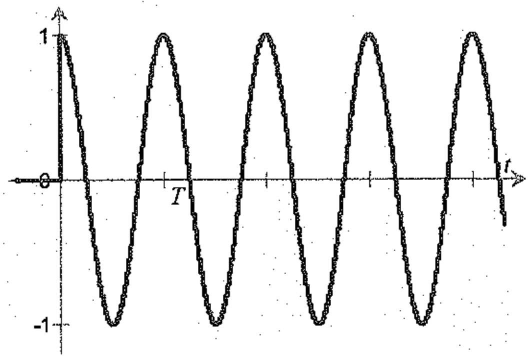


Figure 53 **cos(ω.t) . u(t)**

Sachant qu'une exponentielle dont l'exposant est imaginaire peut s'écrire sous forme de la somme de ces deux fonctions.

$$e^{j\cdot\omega\cdot t} = \cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

On applique aussi la propriété d'homogénéité, ici vis-à-vis de l'opérateur j :

$$L(e^{j\cdot\omega\cdot t}) = L\left(\cos(\omega \cdot t)\right) + j \cdot L\left(\sin(\omega \cdot t)\right)$$

$$L(e^{j\cdot\omega\cdot t}) = \int_0^{\infty} e^{j\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{-p\cdot t} \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-j\cdot\omega)\cdot t} \cdot dt = \left[\frac{e^{-(p-j\cdot\omega)\cdot t}}{j\cdot\omega - p}\right]_0^{\infty} = \left[\frac{0}{j\cdot\omega-p} - \frac{1}{j\cdot\omega - p}\right] = \frac{1}{p - j\cdot\omega}$$

Manipulons $\dfrac{1}{p-j\cdot\omega}$ pour lui donner une forme complexe qui nous permette d'isoler les parties réelle et imaginaire.

$$\frac{1}{p-j\cdot\omega} = \frac{p+j\cdot\omega}{p+j\cdot\omega} \cdot \frac{1}{p-j\cdot\omega} = \frac{p+j\cdot\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{p}{p^2+\omega^2} + j \cdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

Enfin puisque $L(e^{j\cdot\omega\cdot t}) = L\left(\cos(\omega \cdot t)\right) + j \cdot L\left(\sin(\omega \cdot t)\right)$ nous pouvons déduire que :

$$\boxed{L\left(\cos(\omega \cdot t)\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{L\left(\sin(\omega \cdot t)\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}}$$

5.2.2.2 Exemple 2

Calculons la transformée de Laplace des fonctions $e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ et $e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ illustrées aux Figure 54 et Figure 55. Ces fonctions sont celles que l'on retrouve souvent en réponse des systèmes linéaires.

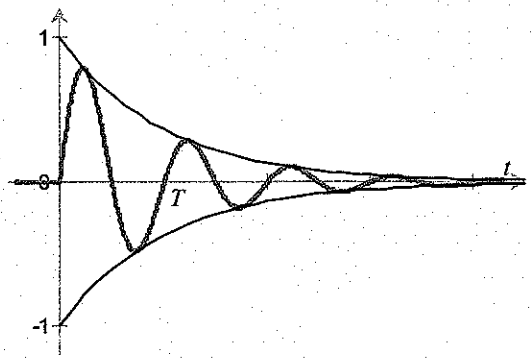


Figure 54 $e^{-a.t}$. sin(ω.t).u(t)

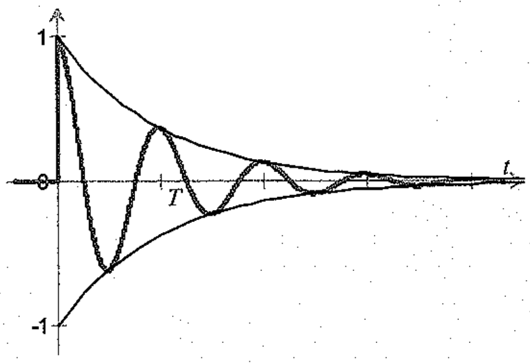


Figure 55 $e^{-a.t}$. cos(ω.t).u(t)

On calcule à nouveau la transformée d'une exponentielle $f(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = e^{(j \cdot \omega - \alpha) \cdot t}$

et on utilise le résultat : $L(e^{-a \cdot t}) = \dfrac{1}{p+a}$ avec dans ce cas $a = (\alpha - j \cdot \omega)$

Ce qui donne $L(e^{-(\alpha - j \cdot \omega) \cdot t}) = \dfrac{1}{p+\alpha - j \cdot \omega} = \dfrac{p+\alpha+j \cdot \omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2} = \dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2} + j \cdot \dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

Et en appliquant le principe d'additivité :

$$L\left(e^{-(\alpha - j \cdot \omega \cdot t)}\right) = L\left(e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)\right) + L\left(e^{-\alpha \cdot t} \cdot j \cdot \sin(\omega \cdot t)\right) = L\left(e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)\right) + j \cdot L\left(e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)\right)$$

On obtient :

$$\boxed{L\left(e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)\right) = \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{L\left(e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)\right) = \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}}$$

5.2.2.3 Exemple 3

Rappelons que le sinus hyperbolique $\sinh(\omega \cdot t)$ est défini par $\sin(j \cdot \omega \cdot t) = j \cdot \sinh(\omega \cdot t)$.

$$L\left(\sin(\omega \cdot t)\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \qquad \text{donc} \quad L\left(\sin(j \cdot \omega \cdot t)\right) = \frac{j \cdot \omega}{p^2 + (j \cdot \omega)^2} = \frac{j \cdot \omega}{p^2 - \omega^2}$$

et par application de la propriété d'homogénéité, ici vis-à-vis de l'opérateur $\frac{1}{j}$:

$$L\left(\sinh(\omega \cdot t)\right) = L\left(\frac{1}{j} \cdot \sin(j \cdot \omega \cdot t)\right) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$$

$$\boxed{L\left(\sinh(\omega \cdot t)\right) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}}$$

Le cosinus hyperbolique $\cosh(\omega \cdot t)$ est défini par $\cos(j \cdot \omega \cdot t) = \cosh(\omega \cdot t)$.

$$L\left(\cos(\omega \cdot t)\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \qquad \text{donc} \quad L\left(\cos(j \cdot \omega \cdot t)\right) = \frac{p}{p^2 + (j \cdot \omega)^2} = \frac{p}{p^2 - \omega^2}$$

$$\boxed{L\left(\cosh(\omega \cdot t)\right) = \frac{p}{p^2 - \omega^2}}$$

5.2.2.4 Exemple 4

Ces propriétés d'additivité et d'homogénéité nous servent aussi pour le calcul de :

$$L\left(e^{-a \cdot t} \cdot \sinh(\omega \cdot t)\right) = L\left(e^{-a \cdot t} \cdot \frac{1}{j} \cdot \sin(j \cdot \omega \cdot t)\right) = \frac{1}{j} \cdot \frac{j \cdot \omega}{(p+a)^2 + (j \cdot \omega)^2} \quad \text{ce qui donne :}$$

$$\boxed{L\left(e^{-a \cdot t} \cdot \sinh(\omega \cdot t)\right) = \frac{\omega}{(p+a)^2 - \omega^2}}$$

Le même raisonnement nous mène à :

$$L\left(e^{-a \cdot t} \cdot \cosh(\omega \cdot t)\right) = L\left(e^{-a \cdot t} \cdot \cos(j \cdot \omega \cdot t)\right) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + (j \cdot \omega)^2} \quad \text{ce qui donne :}$$

$$\boxed{L\left(e^{-a \cdot t} \cdot \cosh(\omega \cdot t)\right) = \frac{p+a}{(p+a)^2 - \omega^2}}$$

5.2.3 Théorème du développement d'Heaviside

Soit $N(p)$ et $D(p)$ deux polynômes en p tels que le degré de $N(p)$ soit inférieur au degré de $D(p)$.

Supposons que $D(p)$ ait n zéros distincts $z_k, k=1,2,3,\cdots,n$ alors :

$$L^{-1}\left(\frac{N(p)}{D(p)}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{N(z_k)}{D'(z_k)}\cdot e^{z_k\cdot t}$$

En fait, puisque $D(p)$ est un polynôme qui possède n zéros distincts $z_1,z_2,\cdots,z_n$ nous pouvons écrire, en appliquant la méthode des fractions rationnelles :

$$\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{A_1}{p-z_1}+\frac{A_2}{p-z_2}+\cdots+\frac{A_k}{p-z_k}+\cdots+\frac{A_n}{p-z_n}$$

En multipliant les deux membres de l'équation par $(p-z_k)$ et en faisant $p\to z_k$ on obtient :

$$A_k=\lim_{p\to z_k}\frac{N(p)}{D(p)}\cdot(p-z_k)=\lim_{p\to z_k}N(p)\cdot\frac{(p-z_k)}{D(p)}=\lim_{p\to z_k}N(p)\cdot\lim_{p\to z_k}\frac{(p-z_k)}{D(p)}=N(z_k)\cdot\lim_{p\to z_k}\frac{0}{0}$$

En appliquant la règle de l'Hospital

$$A_k=\lim_{p\to z_k}N(p)\cdot\lim_{p\to z_k}\frac{(p-z_k)}{D(p)}=N(z_k)\cdot\lim_{p\to z_k}\frac{1}{D'(p)}=\frac{N(z_k)}{D'(z_k)}$$

Ainsi $\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{A_1}{p-z_1}+\frac{A_2}{p-z_2}+\cdots+\frac{A_k}{p-z_k}+\cdots+\frac{A_n}{p-z_n}$ peut aussi s'écrire :

$$\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{N(z_1)}{D'(z_1)}\cdot\frac{1}{p-z_1}+\frac{N(z_2)}{D'(z_2)}\cdot\frac{1}{p-z_2}+\cdots+\frac{N(z_k)}{D'(z_k)}\cdot\frac{1}{p-z_k}+\cdots+\frac{N(z_n)}{D'(z_n)}\cdot\frac{1}{p-z_n}$$

En prenant la transformée inverse de Laplace, il vient :

$$L^{-1}\left(\frac{N(p)}{D(p)}\right)=L^{-1}\left(\frac{N(z_1)}{D'(z_1)}\cdot\frac{1}{p-z_1}+\cdots+\frac{N(z_k)}{D'(z_k)}\cdot\frac{1}{p-z_k}+\cdots+\frac{N(z_n)}{D'(z_n)}\cdot\frac{1}{p-z_n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{N(z_k)}{D'(z_k)}\cdot e^{z_k\cdot t}$$

5.2.3.1 Remarque

Lorsqu'on recherche l'original d'une fraction rationnelle proprement dite $\frac{N(p)}{D(p)}$, comme le degré de *N(p)* est inférieur au degré de *D(p)*, on décompose cette fraction rationnelle en éléments simples de première espèce. Ces éléments sont des fonctions de la forme $\frac{1}{(p+a)^n}$

5.2.4 Multiplication par des puissances de *t*

Nous allons démontrer que :

si $L(f(t)) = F(p)$ alors $L\left(t^n \cdot f(t)\right) = (-1)^n \cdot \dfrac{d^n F(p)}{dp^n}$ avec $n = 1, 2, 3, \cdots$

Nous savons que $F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt$

D'après la règle de Leibnitz,

$$\frac{dF(p)}{dp} = \frac{d}{dp}\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt = \int_0^\infty \frac{\partial\left(f(t) \cdot e^{-p \cdot t}\right)}{\partial p} \cdot dt = -\int_0^\infty f(t) \cdot t \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt$$

Hors $-\int_0^\infty f(t) \cdot t \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt = -\int_0^\infty \{t \cdot f(t)\} \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt = -L\left(t \cdot f(t)\right)$

Donc $\dfrac{dF(p)}{dp} = -L\left(t \cdot f(t)\right)$ ce qui prouve la validité du théorème dans le cas ou $n = 1$

Pour établir le théorème en général, utilisons une méthode d'induction mathématique. Nous allons supposer le théorème vrai pour $n = k$.

$$\int_0^\infty t^k \cdot f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt \doteq (-1)^k \cdot \frac{d^k}{dp^k} F(P)$$

Donc, si on prend la dérivée

$$\frac{d}{dp}\int_0^\infty t^k \cdot f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt \doteq \frac{d}{dp}(-1)^k \cdot \frac{d^k}{dp^k} F(P) = (-1)^k \cdot \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}} F(P)$$

Or d'après la règle de Leibnitz

$$\frac{d}{dp}\int_0^\infty t^k \cdot f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt = \int_0^\infty \frac{\partial\left(t^k \cdot f(t) \cdot e^{-p \cdot t}\right)}{\partial p} \cdot dt = -\int_0^\infty t^{k+1} \cdot f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt$$

Donc $-\int_0^\infty t^{k+1} \cdot f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt \doteq (-1)^k \cdot \dfrac{d^{k+1}}{dp^{k+1}} F(P)$

$$\int_0^\infty t^{k+1} \cdot f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt \doteq -1 \cdot (-1)^k \cdot \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}} F(P) \text{ ou } \int_0^\infty t^{k+1} \cdot f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt \doteq (-1)^{k+1} \cdot \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}} F(P)$$

En conclusion

a) Si le théorème est vrai pour k il est aussi vrai pour $k+1$
b) Le théorème est vrai pour $k = 1$

Donc le théorème est vrai pour $k = 1, 2, 3, \cdots$

5.2.4.1 Exemple

Recherchons la transformée de Laplace de la fonction $t^n \cdot e^{-a \cdot t}$.

Soit $L(f(t)) = F(p) = \int_0^\infty t^n \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt = \int_0^\infty t^n \cdot e^{-(p+a) \cdot t} \cdot dt$ que l'on intègre par parties.

Sachant que $d(u(t) \cdot v(t)) = u(t) \cdot d(v(t)) + v(t) \cdot d(u(t))$. Notez que cette équation utilise les notations mathématiques courantes, ainsi $u(t)$ représente une fonction quelconque du temps et pas la fonction échelon.

Sachant que $\int_0^\infty u(t) \cdot d(v(t)) = [u(t) \cdot v(t)]_0^\infty - \int_0^\infty v(t) \cdot d(u(t))$

Le choix le plus judicieux est :

$dv(t) = e^{-(p+a) \cdot t} \cdot dt$	ce qui implique que	$v = -\dfrac{1}{p+a} \cdot e^{-(p+a) \cdot t}$
$u(t) = t^n$	ce qui implique que	$du(t) = n \cdot t^{n-1} \cdot dt$

Ainsi $\int_0^\infty t^n \cdot e^{-(p+a) \cdot t} \cdot dt = \left[t^n \cdot \left(-\dfrac{1}{p+a} \right) \cdot e^{-(p+a) \cdot t} \right]_0^\infty - \int_0^\infty -\dfrac{1}{p+a} \cdot e^{-(p+a) \cdot t} \cdot n \cdot t^{n-1} \cdot dt$

Sachant que $\lim_{t \to \infty}(t^n \cdot e^{-k \cdot t}) = 0$ on en déduit que le terme $\left[t^n \cdot \left(-\dfrac{1}{p+a} \right) \cdot e^{-(p+a) \cdot t} \right]_0^\infty = 0$

Ce qui nous conduit à : $\int_0^\infty t^n \cdot e^{-(p+a) \cdot t} \cdot dt = \dfrac{n}{p+a} \cdot \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-(p+a) \cdot t} \cdot dt$

Si nous appliquons le même raisonnement une seconde fois, nous obtenons :

$$\int_0^\infty t^n \cdot e^{-(p+a) \cdot t} \cdot dt = \frac{n \cdot (n-1)}{(p+a)^2} \cdot \int_0^\infty t^{n-2} \cdot e^{-(p+a) \cdot t} \cdot dt$$

Si on applique récursivement le raisonnement n fois. Sachant que $\int_0^\infty e^{-(p+a) \cdot t} . dt = \dfrac{1}{p+a}$

Nous obtenons que : $\boxed{L(t^n \cdot e^{-a \cdot t}) = F(p) = \int_0^\infty t^n \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt = \dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}}$

Ce qui est conforme à $L(t^n \cdot e^{-a \cdot t}) = (-1)^n \cdot \dfrac{d^n \left(\dfrac{1}{p+a} \right)}{dp^n} = \dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

Cette formule est obtenue par application de $L(t^n \cdot f(t)) = (-1)^n \cdot \dfrac{d^n F(p)}{dp^n}$

5.2.5 Transformée de Laplace d'une fonction dérivée

Recherchons la transformée de Laplace de la fonction dérivée par rapport au temps $f'(t)$ en fonction de la transformée de Laplace de $f(t)$.

Soit $L(f(t)) = F(p) = \int_0^\infty e^{-p\cdot t} \cdot f(t) \cdot dt$ que l'on intègre par parties.

Sachant que $d(u(t)\cdot v(t)) = u(t)\cdot d(v(t)) + v(t)\cdot d(u(t))$. Notez que cette équation utilise les notations mathématiques courantes, ainsi $u(t)$ représente une fonction quelconque du temps et pas la fonction échelon.

Sachant que $\int_0^\infty u(t)\cdot d(v(t)) = [u(t)\cdot v(t)]_0^\infty - \int_0^\infty v(t)\cdot d(u(t))$, le choix le plus judicieux est :

$dv(t) = e^{-p\cdot t}\cdot dt$	ce qui implique que	$v = -\frac{1}{p}\cdot e^{-p\cdot t}$
$u(t) = f(t)$	ce qui implique que	$du(t) = f'(t)\cdot dt$

Ainsi $L(f(t)) = F(p) = \int_0^\infty e^{-p\cdot t}\cdot f(t)\cdot dt = \left[f(t)\cdot\left(-\frac{1}{p}\right)\cdot e^{-p\cdot t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{p}\cdot e^{-p\cdot t}\cdot f'(t)\cdot dt$

On suppose que $f(t)$ a une limite finie lorsque $t\to\infty$, ainsi $\lim_{t\to\infty} f(t)\cdot\left(-\frac{1}{p}\right)\cdot e^{-p\cdot t} = 0$.

Cette supposition est toujours vraie pour les signaux physiques (qui ont une énergie finie).

On calcule facilement $\left[f(t)\cdot\left(-\frac{1}{p}\right)\cdot e^{-p\cdot t}\right]_0 = f(0)\cdot\left(-\frac{1}{p}\right)$

On trouve que : $L(f(t)) = F(p) = f(0)\cdot\left(\frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\cdot\int_0^\infty e^{-p\cdot t}\cdot f'(t)\cdot dt = \frac{1}{p}\cdot f(0) + \frac{1}{p}\cdot L(f'(t))$

On déduit finalement que : $\boxed{L(f'(t)) = p\cdot L(f(t)) - f(0)}$

5.2.6 Transformée de Laplace d'une fonction dérivée d'ordre 2

Sachant que $L(f'(t)) = p\cdot L(f(t)) - f(0)$, on peut remplacer dans cette formule $f'(t)$ par $f''(t)$ et $f(t)$ par $f'(t)$. La fonction $f''(t)$ désignant la dérivée seconde de p $f(t)$ par rapport au temps.

$$L(f''(t)) = p.L(f'(t)) - f'(0) = p\cdot[p\cdot L(f(t)) - f(0)] - f'(0).$$

Le résultat final après distribution est : $\boxed{L(f''(t)) = p^2\cdot L(f(t)) - p\cdot f(0) - f'(0)}$

Si de plus, les valeurs à l'origine sont nulles, la formule peut se simplifier.

5.2.6.1 Exemples

Recherchons la transformée de Laplace de $f(t)=t$ nulle si $t<0$ (fonction rampe).

$f'(t)=1$ et $L(1)=\frac{1}{p}$, la fonction est aussi nulle si $t=0$ donc $L(1)=\frac{1}{p}=p\cdot L(t)$

$$\boxed{L(t)=\frac{1}{p^2}}$$

Soit $f_1(t)=\sin(\omega\cdot t)\cdot u(t)$ avec $\omega=\frac{2\cdot\pi}{T}=2\cdot\pi\cdot f$, alors $F_1(p)=L\left(f_1(t)\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Nous savons que $f_1'(t)=\frac{df_1(t)}{dt}=\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)$

Les tables de transformées de Laplace nous montrent que si :

$f_2(t)=\cos(\omega\cdot t)\cdot u(t)$, alors $F_2(p)=L\left(f_2(t)\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2}$

La transformée de Laplace étant un opérateur linéaire, nous savons que :

$L\left(\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)\right)=\omega\cdot L\left(\cos(\omega\cdot t)\right)=\frac{\omega\cdot p}{p^2+\omega^2}$

Nous savons aussi que la transformée de Laplace d'une fonction dérivée est telle que :

$L\left(f'(t)\right)=p\cdot L\left(f(t)\right)-f(0)$ et donc que $L\left(\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)\right)=p\cdot L\left(\sin(\omega\cdot t)\right)=\frac{p\cdot\omega}{p^2+\omega^2}$

Les deux méthodes donnent bien un résultat identique.

Soit $f_1(t)=\cos(\omega\cdot t)\cdot u(t)$ avec $\omega=\frac{2\cdot\pi}{T}=2\cdot\pi\cdot f$, alors $F_1(p)=L\left(f_1(t)\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2}$

Nous savons que $f_1'(t)=\frac{df_1(t)}{dt}=-\omega\cdot\sin(\omega\cdot t)$

Les tables de transformées de Laplace nous montrent que si :

$f_2(t)=\sin(\omega\cdot t)\cdot u(t)$, alors $F_2(p)=L\left(f_2(t)\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

La transformée de Laplace étant un opérateur linéaire nous savons que :

$L\left(-\omega\cdot\sin(\omega\cdot t)\right)=-\omega\cdot L\left(\sin(\omega\cdot t)\right)=\frac{-\omega^2}{p^2+\omega^2}$

Nous savons aussi que la transformée de Laplace d'une fonction dérivée est telle que :

$L\left(f'(t)\right)=p\cdot L\left(f(t)\right)-f(0)$

et donc que :

$$L\left(-\omega\cdot\sin(\omega\cdot t)\right)=p\cdot L\left(\cos(\omega\cdot t)\right)-\cos(0)=\frac{p^2}{p^2+\omega^2}-1=\frac{p^2}{p^2+\omega^2}-\frac{p^2+\omega^2}{p^2+\omega^2}=\frac{-\omega^2}{p^2+\omega^2}$$

Les deux méthodes donnent bien un résultat identique.

5.2.7 Transformée de Laplace d'une intégrale

Soit $h(t)=\int_0^t f(u)\cdot du$, on peut donc déduire que $h'(t)=f(t)$.

Puisque $L(f'(t))=p\cdot L(f(t))-f(0)$

nous en déduisons que $L(h'(t))=p\cdot L(h(t))-h(0)$ or $h(0)=\int_0^0 f(u)\cdot du=0$

donc $L(h'(t))=p\cdot L(h(t))$ et $L(h(t))=\frac{1}{P}\cdot L(f(t))$

Ainsi

$$\boxed{L\left(\int_0^t f(u)\cdot du\right)=\frac{1}{p}\cdot L(f(t))}$$

5.2.8 Théorème de translation

Si $L(f(t))=F(p)$ calculons ce que vaut alors $L\left(e^{-a\cdot t}f(t)\right)$.

Si $L(f(t))=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-p\cdot t}\cdot dt=F(p)$

Si $L\left(e^{-a\cdot t}\cdot f(t)\right)=\int_0^\infty e^{-a\cdot t}\cdot f(t)\cdot e^{-p\cdot t}\cdot dt$

Alors $L\left(e^{-a\cdot t}\cdot f(t)\right)=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-(p+a)\cdot t}\cdot dt=F(p+a)$

Ainsi

$$\boxed{L\left(e^{-a\cdot t}\cdot f(t)\right)=F(p+a)}$$

5.2.9 Théorème du changement d'échelle

Si $L(f(t))=F(p)$ calculons ce que vaut alors $L(f(a\cdot t))$.

$L(f(a\cdot t))=\int_0^\infty f(a\cdot t)\cdot e^{-p\cdot t}\cdot dt$ si on opère un changement de variable tel que $a\cdot t=u$,

alors : $L(f(a\cdot t))=L(f(u))=\int_0^\infty f(u)\cdot e^{-p\cdot\frac{u}{a}}\cdot\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\cdot\int_0^\infty f(u)\cdot e^{-\frac{p}{a}\cdot u}\cdot du=\frac{1}{a}\cdot F(\frac{p}{a})$

Ainsi

$$\boxed{L(f(a\cdot t))=\frac{1}{a}\cdot F(\frac{p}{a})}$$

5.2.10 Théorème du retard

Soit une fonction $f(t)$, soit $f(t-\tau)$ la même fonction décalée dans le temps, comme illustré en Figure 56.

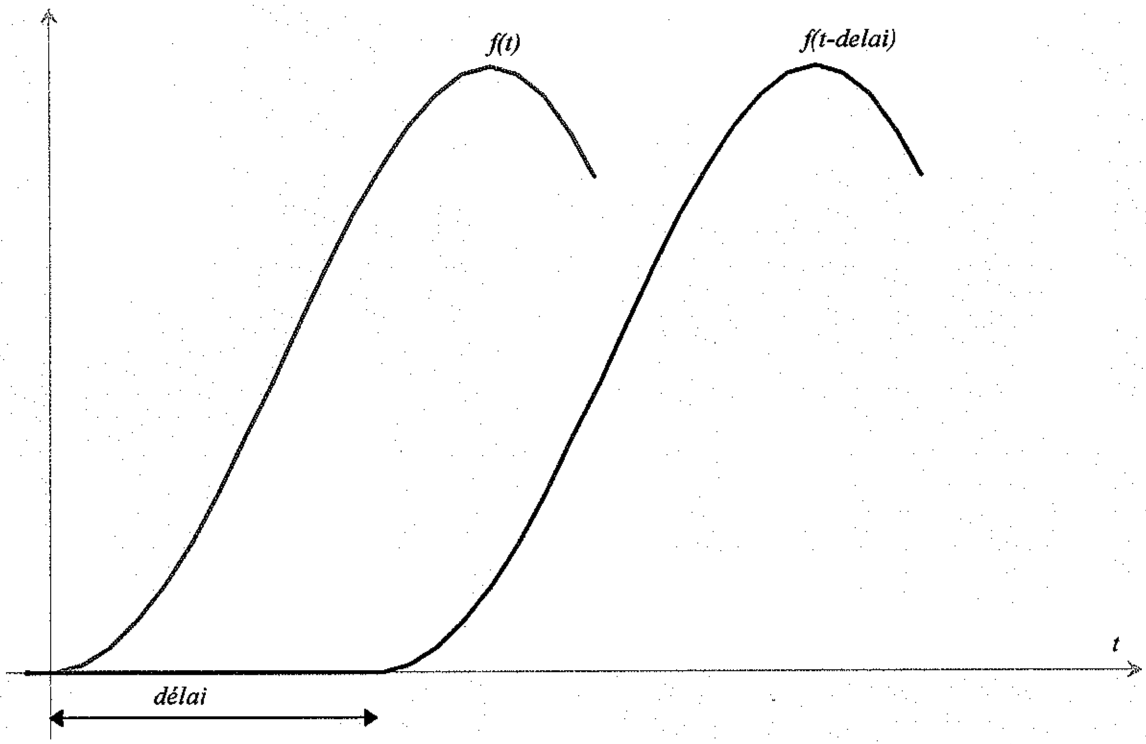


Figure 56 Retard

Sa transformée de Laplace est :

$$L\left(f(t)\right)=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-p\cdot t}\cdot dt$$

multiplions cette expression par $e^{-p\cdot\tau}$, nous obtenons :

$$e^{-p\cdot\tau}\cdot L\left(f(t)\right)=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-p\cdot t}\cdot e^{-p\cdot\tau}\cdot dt=\int_0^\infty f(t).e^{-p\cdot(t+\tau)}\cdot dt$$

Effectuons un changement de variable : $T=t+\tau$ ceci implique que $dT=dt$. La borne supérieure de l'intégrale reste infinie et la borne inférieure devient τ.

$e^{-p\cdot\tau}\cdot L\left(f(T)\right)=\int_\tau^\infty f(T-\tau)\cdot e^{-p\cdot T}\cdot dT$ qui est identique à

$$e^{-p\cdot\tau}\cdot L\left(f(t)\right)=\int_\tau^\infty f(t-\tau)\cdot e^{-p\cdot t}\cdot dt.$$

La borne inférieure de cette intégrale peut devenir '0' puisque la fonction est nulle de $0\cdots\tau$. Cette intégrale est la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ retardée de τ (positif).

$$\boxed{L\left(f(t-\tau)\right)=e^{-p\cdot\tau}\cdot L\left(f(t)\right)}$$

5.2.10.1 Exemple 1

Recherchons la transformée de Laplace d'un signal rectangulaire, tel celui de la Figure 57.

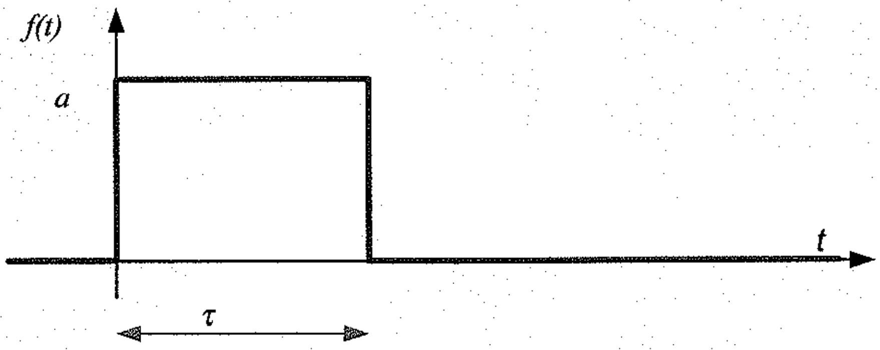


Figure 57 Signal rectangulaire

La Figure 58 montre que le signal $f(t)$ est la somme des deux signaux $f_1(t)$ et $f_2(t)$, le signal $f_2(t)$ est l'opposé du signal $f_1(t)$ décalé de la quantité τ.

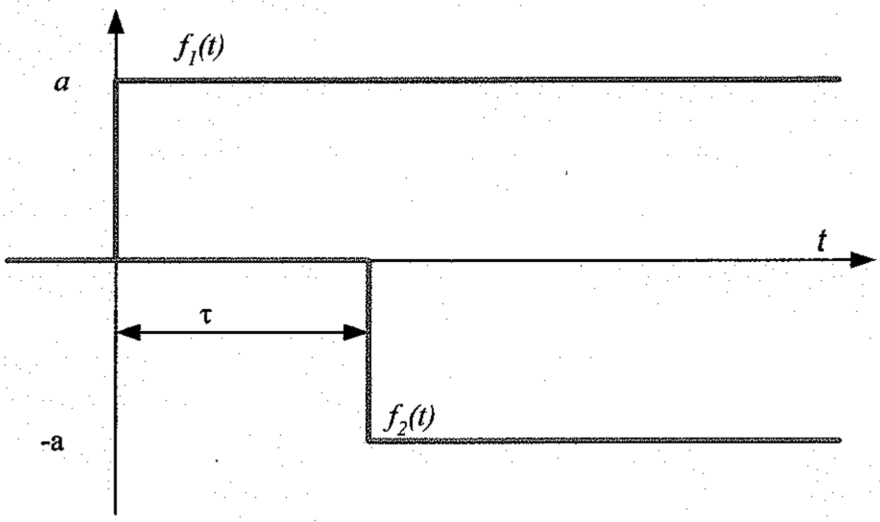


Figure 58 Composition d'un signal rectangulaire

La transformée de Laplace de la fonction rectangle s'écrit :

$$L\left(f(t)\right) = L\left(f_1(t)\right) - L\left(f_2(t)\right) = L(a) - e^{-p\cdot\tau} \cdot L(a) = \frac{a}{p} - e^{-p\cdot\tau} \cdot \frac{a}{p} = \frac{a}{p}(1 - e^{-p\cdot\tau})$$

5.2.10.2 Exemple 2

Recherchons la transformée de Laplace de la fonction *périodique* illustrée à la Figure 59.

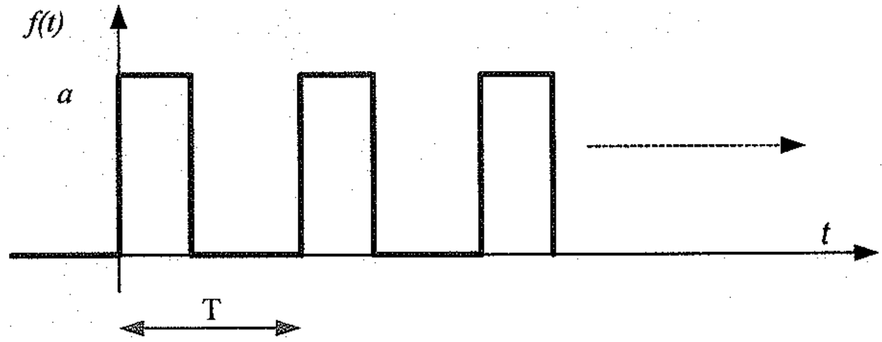


Figure 59 **Fonction périodique**

Cette fonction se décompose en une infinité de fonctions *rectangle*, la première fonction commence au temps *t=0*, la deuxième fonction commence après 1.T, la troisième commence après 2.T, …

La transformée de Laplace est donc la somme de chacune des transformées :

$$L(f(t)) = L(f_1(t)) + L(f_2(t)) + L(f_3(t)) + \ldots + L(f_4(t)) + \ldots$$

et nous savons que :

$$L(f_2(t)) = e^{-p \cdot T} \cdot L(f_1(t))$$
$$L(f_3(t)) = e^{-p \cdot 2 \cdot T} \cdot L(f_1(t))$$
$$\ldots$$
$$L(f_n(t)) = e^{-p \cdot n \cdot T} \cdot L(f_1(t))$$
$$\ldots$$

Ainsi $L(f(t)) = (1 + e^{-p \cdot T} + e^{-p \cdot 2 \cdot T} + \ldots + e^{-p \cdot n \cdot T} + \ldots) \cdot L(f_1(t))$

Sachant que $(1 + e^{-p \cdot T} + e^{-p \cdot 2 \cdot T} + \ldots + e^{-p \cdot n \cdot T} + \ldots) = \dfrac{1}{1 - e^{-p \cdot T}}$ lorsque $n \to \infty$, on obtient le résultat général :

Soit *f(t)* une fonction de période T, et $f_1(t)$ un motif de *f(t)* alors $L(f(t)) = \dfrac{L(f_1(t))}{1 - e^{-p \cdot T}}$

5.2.11 Théorème de Borel - Convolution

En prenant comme point de départ la définition de la transformée de Laplace :

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-p\cdot t}\cdot dt$$

Cherchons la valeur de $F(p)\cdot G(p)$, nous supposons les fonctions *f(t)* et *g(t)* causales.

$$F(p)\cdot G(p)=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-p\cdot t}\cdot dt\cdot G(p)=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-p\cdot t}\cdot G(p)\cdot dt$$

En nous basant sur le théorème du retard, on trouve

$$e^{-p\cdot t}\cdot G(p)=e^{-p\cdot t}\cdot L\big(g(\tau)\big)=L\big(g(\tau-t)\big)=\int_0^\infty g(\tau-t)\cdot e^{-p\cdot\tau}\cdot d\tau$$

En combinant les deux équations, on trouve que :

$$F(p)\cdot G(p)=\int_0^\infty f(t)\cdot\left(\int_0^\infty g(\tau-t)\cdot e^{-p\cdot\tau}\cdot d\tau\right)\cdot dt$$

Puisque *f(t)* est une constante vis-à-vis de τ :

$$F(p)\cdot G(p)=\int_0^\infty f(t)\cdot\left(\int_0^\infty g(\tau-t)\cdot e^{-p\cdot\tau}\cdot d\tau\right)\cdot dt=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\cdot g(\tau-t)\cdot e^{-p\cdot\tau}\cdot d\tau\right)\cdot dt$$

Dans ce cas on peut changer l'ordre d'intégration, ce qui donne :

$$F(p)\cdot G(p)=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\cdot g(\tau-t)\cdot e^{-p\cdot\tau}\cdot d\tau\right)\cdot dt=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\cdot g(\tau-t)\cdot e^{-p\cdot\tau}\cdot dt\right)\cdot d\tau$$

Cette fois c'est $e^{-p\cdot\tau}$ qui est une constante vis-à-vis de *t* :

$$F(p)\cdot G(p)=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\cdot g(\tau-t)\cdot e^{-p\cdot\tau}\cdot dt\right)\cdot d\tau=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\cdot g(\tau-t)\cdot dt\right)\cdot e^{-p\cdot\tau}\cdot d\tau$$

Puisque *g(t)* est une fonction causale :

$$F(p)\cdot G(p)=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\cdot g(\tau-t)\cdot dt\right)\cdot e^{-p\cdot\tau}\cdot d\tau=\int_0^\infty\left(\int_0^\tau f(t)\cdot g(\tau-t)\cdot dt\right)\cdot e^{-p\cdot\tau}\cdot d\tau$$

On note que par simple changement de variable $v\to t$ et $t\to\tau$ l'intégrale s'écrit :

$$F(p)\cdot G(p)=\int_0^\infty\left(\int_0^t f(v)\cdot g(t-v)\cdot dv\right)\cdot e^{-p\cdot t}\cdot dt$$

Donc, en utilisant une notation plus compacte :

$$F(p)\cdot G(p)=\int_0^\infty f(t)*g(t)\cdot e^{-p\cdot t}\cdot dt=L\big(f(t)*g(t)\big)$$

Finalement, on peut mettre en évidence que :

$$\boxed{L\big(f(t)*g(t)\big)=F(p)\cdot G(p)}$$

5.2.12 Théorème de la valeur initiale

Au paragraphe 5.2.5 nous avons montré que $L(f'(t)) = p \cdot L(f(t)) - f(0)$
Prenons-en la limite de part et d'autre, pour $p \to \infty$.

$$\lim_{p \to \infty} L(f'(t)) = \lim_{p \to \infty} \left[p \cdot L(f(t)) - f(0) \right]$$

Puisque $\lim_{p \to \infty} L(f'(t)) = \lim_{p \to \infty} \int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt = \int_0^\infty f'(t) \cdot \lim_{p \to \infty} e^{-p \cdot t} \cdot dt = 0$
Seulement si $f'(t)$ à une valeur finie pour 0 et ∞.

Donc $\lim_{p \to \infty} \left[p \cdot L(f(t)) - f(0) \right] = 0$ et puisque $f(0)$ ne varie pas en fonction de p

$$\boxed{\lim_{p \to \infty} p \cdot L(f(t)) = f(0)}$$

5.2.13 Théorème de la valeur finale

Nous savons que $L(f'(t)) = p \cdot L(f(t)) - f(0)$ (voir 5.2.3)
Prenons-en la limite de part et d'autre, pour $p \to 0$.

$$\lim_{p \to 0} L(f'(t)) = \lim_{p \to 0} \left[p \cdot L(f(t)) - f(0) \right]$$

Puisque

$$\lim_{p \to 0} L(f'(t)) = \lim_{p \to 0} \int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt = \int_0^\infty f'(t) \cdot \lim_{p \to 0} e^{-p \cdot t} \cdot dt = \int_0^\infty f'(t) \cdot dt = \lim_{t \to \infty} f(t) - f(0)$$

Seulement si $f'(t)$ à une valeur finie pour 0 et ∞.

$\lim_{t \to \infty} f(t) - f(0) = \lim_{p \to 0} \left[p \cdot L(f(t)) - f(0) \right]$ et puisque $f(0)$ ne varie pas en fonction de p

$$\boxed{\lim_{p \to 0} p \cdot L(f(t)) = \lim_{t \to \infty} f(t)}$$

5.2.13.1 Remarque

Ces deux théorèmes ont une grande importance, car lorsqu'on traite les circuits et systèmes en calcul opérationnel (en *p*), il n'est pas nécessaire de transformer les résultats (en *p*) en fonction du temps ($p \to t$) pour déterminer leurs valeurs limites. Par ailleurs, il est plus aisé de rechercher la limite d'une fraction rationnelle en *p*, que la limite d'une fonction temporelle comportant souvent des *sinus*, des *exponentielles*, …

5.3 Recherche de l'original d'une transformée de Laplace

Nous faisons l'hypothèse que *F(p)* est une ***fraction rationnelle proprement dite***, c'est-à-dire le rapport de deux polynômes où le degré *n* du numérateur *N(p)* est inférieur au degré *m* du dénominateur *D(p)*.

$$F(p)=\frac{\left(a_0+a_1\cdot p+a_2\cdot p^2+\cdots+a_n\cdot p^n\right)}{\left(b_0+b_1\cdot p+b_2\cdot p+\cdots+b_m\cdot p^m\right)}$$

5.3.1 Méthode générale

Les étapes de calcul de l'original sont les suivantes :

1) Recherchez les zéros de *F(p)*, ce sont les racines du numérateur de *F(p)*, ces racines sont réelles ou complexes conjuguées.

2) Recherchez les pôles de *F(p)*, ce sont les racines du dénominateur de *F(p)*, ces racines sont réelles ou complexes conjuguées.

Après ces deux étapes, il est possible d'écrire *F(p)* sous la forme :

$$\boxed{F(p) = k\cdot\frac{(p+z_1)\cdot(p+z_2)\cdot\ldots\cdot(p+z_n)}{(p+p_1)\cdot(p+p_2)\cdot\ldots\cdot(p+p_m)}}$$

3) Ecrire *F(p)* sous la forme d'une somme d'éléments simples telle que :

$$\boxed{F(p)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{\left(p+a_i\right)^j}+\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{r}\frac{B_{kl}\cdot p+C_{kl}}{\left(p^2+b_k\cdot p+c_k\right)^l}}$$

Dans cette représentation, les éléments de la première sommation s'appellent éléments simples de première espèce et ceux de la seconde, éléments simples de deuxième espèce. Les constantes *A, B* et *C* sont appelées résidus.

Cette forme nous permet, en utilisant les propriétés d'additivité de la transformée de Laplace, d'obtenir des originaux simples, du style rampe, exponentielle, sinus, cosinus, ...

5.3.2 Exemple de représentation

Soit la fonction $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1-2\cdot j)\cdot(p+1+2\cdot j)\cdot(p+3)}$

Cette fonction possède un seul zéro : $p_{z1}=-2$

Cette fonction possède trois pôles : $p_{p1}=-1+2\cdot j$, $p_{p2}=-1-2\cdot j$ et $p_{p3}=-3$

Dans le plan de Laplace, on entourera d'un cercle les zéros et on marquera d'une croix les pôles, comme illustré en Figure 60.

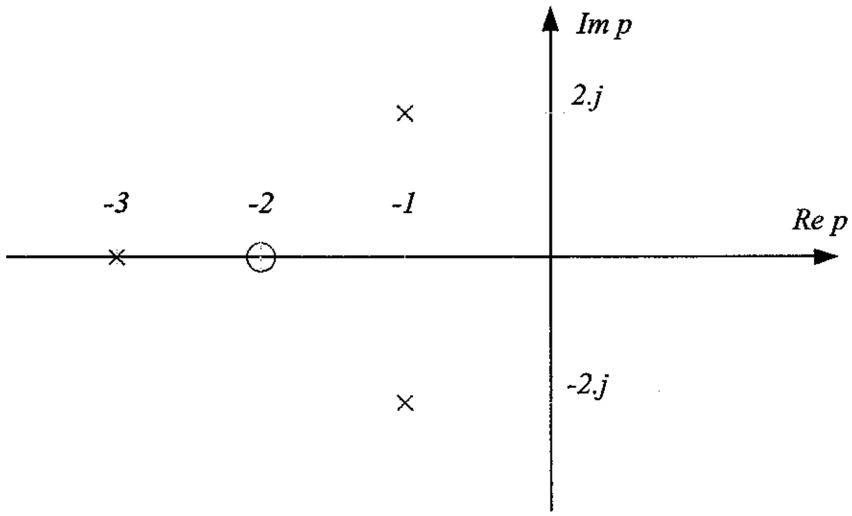


Figure 60 Représentation dans le plan de Laplace

5.3.2.1 Remarques

Si les pôles ou les zéros sont multiples, les croix ou les cercles seront représentés en traits gras.

5.3.3 Transformée avec pôle simple

Les pôles sont dits simples si le dénominateur est de la forme $(p - p_{p0})$

5.3.3.1 Exemple

Soit $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2 + 5 \cdot p + 6}$

Calculons les pôles, c'est une équation du second degré, le déterminant est :

$\Delta = \sqrt{5^2 - 4.1.6} = 1$

les racines sont $\dfrac{-5 \pm \Delta}{2} = -2, -3$

Calculons les zéros, $F(p)$ possède un seul zéro : -1

Soit $F(p) = \dfrac{p+1}{(p+2) \cdot (p+3)}$

Transformons cette expression en somme de deux éléments simples de première espèce :

$$\frac{p+1}{(p+2) \cdot (p+3)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+3}$$

5.3.3.1.1 D'un point de vue analytique

Pour trouver A, on multiplie les deux membres de l'équation par $p+2$

$$\frac{p+1}{p+3} = A + B \cdot \frac{p+2}{p+3}$$

et on attribue à p la valeur –2.

$$\frac{-2+1}{-2+3} = A + B \cdot \frac{-2+2}{-2+3} \Rightarrow A = -1$$

Pour trouver B, on multiplie les deux membres de l'équation par $p+3$

$$\frac{p+1}{p+2} = A \cdot \frac{p+3}{p+2} + B$$

et on attribue à p la valeur –3.

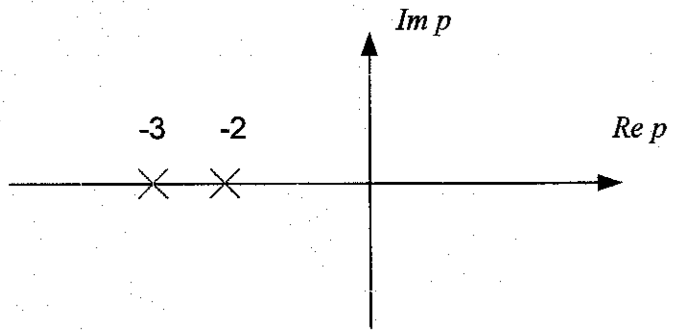
$$\frac{-3+1}{-3+2} = A \cdot \frac{-3+3}{-3+2} + B \Rightarrow B = 2$$

Soit $F(p) = \dfrac{-1}{p+2} + \dfrac{2}{p+3}$ en utilisant des tables de transformée :

$$L^{-1}\left(\frac{-1}{p+2}\right) = -e^{-2.t} \cdot u(t) \text{ et } L^{-1}\left(\frac{2}{p+3}\right) = 2 \cdot e^{-3.t} \cdot u(t)$$

L'original est donc $f(t) = \left(-e^{-2.t} + 2 \cdot e^{-3.t}\right) \cdot u(t)$

5.3.3.1.2 D'un point de vue graphique



Ce sont les pôles qui sont situés le plus près de l'axe imaginaire qui auront la persistance la plus longue, ce sont eux qui influeront le plus longtemps sur le régime transitoire.

5.3.4 Transformée avec pôles multiples

Les pôles sont dits multiples si le dénominateur est de la forme $(p+p_{p0})^n$

5.3.4.1 Exemple

Soit $F(p)=\dfrac{N(p)}{(p+p_0)^n\cdot(p+p_1)}$. On écrit alors $F(p)$ sous la forme :

$$F(p)=\frac{N(p)}{(p+p_0)^n\cdot(p+p_1)}=\frac{A_n}{(p+p_0)^n}+\frac{A_{n-1}}{(p+p_0)^{n-1}}+\frac{A_{n-2}}{(p+p_0)^{n-2}}+\ldots+\frac{A_1}{(p+p_0)^1}+\frac{N_1(p)}{(p+p_1)}$$

Pour déterminer A_n, on multiplie les deux membres de l'équation par $(p-p_0)^n$:

$$\frac{N(p)}{(p+p_1)}=A_n+A_{n-1}\cdot(p+p_0)+A_{n-2}\cdot(p+p_0)^2+\ldots+A_1\cdot(p+p_0)^{n-1}+\frac{N_1(p)\cdot(p+p_0)^n}{(p+p_1)}$$

Enfin, remplaçons p par $-p_0$, ce qui élimine de l'équation toutes les inconnues, sauf $A_n\cdot 0!$.

Pour déterminer A_{n-1}, on multiplie les deux membres de l'équation par $(p+p_{p0})^n$.

Ensuite, on dérive une fois par rapport à p ce qui élimine A_n.

$$\frac{d\left(F(p).(p+p_0)^n\right)}{dp}=A_{n-1}+2\cdot A_{n-2}\cdot(p+p_0)+\ldots+A_1\cdot(n-1)\cdot(p+p_0)^{n-2}+n\cdot\frac{N_1(p)\cdot(p+p_0)^{n-1}}{(p+p_1)}$$

Enfin, remplaçons p par $-p_0$, ce qui élimine de l'équation toutes les inconnues, sauf $A_{n-1}\cdot 1!$.

Pour déterminer A_{n-2}, on multiplie les deux membres de l'équation par $(p+p_{p0})^n$.

Ensuite, on dérive deux fois par rapport à p ce qui élimine A_n et A_{n-1}.

$$\frac{d\left(F(p).(p+p_0)^n\right)^2}{dp^2}=2\cdot A_{n-2}+\ldots+A_1\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(p+p_0)^{n-3}+n\cdot(n-1)\cdot\frac{N_1(p)\cdot(p-p_0)^{n-2}}{(p-p_1)}$$

Enfin, remplaçons p par $-p_0$, ce qui élimine de l'équation toutes les inconnues, sauf $A_{n-2}\cdot 2!$.

Pour déterminer A_{n-i}, on multiplie $F(p)$ par $(p+p_0)^n$

Ensuite, on dérive i fois par rapport à p ce qui élimine tous résidus $A_n\cdots A_{n-i+1}$.

Enfin, remplaçons p par $-p_0$, ce qui élimine de l'équation toutes les inconnues, sauf $A_{n-i}\cdot i!$.

De manière générale : $A_{n-i}=\dfrac{1}{i!}\cdot\lim\limits_{p\to -p_0}\dfrac{d\left(F(p).(p+p_0)^n\right)^i}{dp^i}$

5.3.5 Transformée avec une paire de pôles complexes

Les pôles complexes proviennent d'une équation en p^2, telle que $a \cdot p^2 + b \cdot p + c$ dont les racines sont complexes, on les trouve toujours par paire.

Il est possible de traiter ce cas de manière similaire au traitement des pôles simple, en tenant compte de la valeur complexe des racines.

Toutefois, il est possible d'utiliser une méthode qui consiste à écrire le dénominateur sous la forme $(p+a)^2 + \omega^2$, de façon à ce que suivant la forme du dénominateur (ω ou $(p+a)$), l'original soit une forme $e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ou $e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)$

5.3.5.1 Exemple

Recherchons l'original de $F(p) = \dfrac{p-1}{p^2 + 4 \cdot p + 13}$

Calculons les pôles : $p^2 + 4 \cdot p + 13 = 0 \rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36 = 36 \cdot j^2 \rightarrow p', p'' = -2 \pm 3 \cdot j$
Les pôles étant complexes, on fait apparaître au dénominateur un carré parfait, avec les termes en p^2 et en p. Soit dans cet exemple $p^2 + 4 \cdot p$ qui deviendra $(p+2)^2 - 4$.
Le dénominateur est transformé en $(p+2)^2 - 4 + 13 = (p+2)^2 + 9$
La constante ainsi ajoutée au carré parfait est le carré de la pulsation du sinus ou du cosinus.
Les formes dont on doit se rapprocher sont : $F(p) = \dfrac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$ et $F(p) = \dfrac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$

Dans cet exemple, puisque $a = 2$, nous devons le faire apparaître aussi au numérateur :

$$F(p) = \frac{p-1}{(p+2)^2 + 3^2} = \frac{(p+2)-3}{(p+2)^2 + 3^2} = \frac{p+2}{(p+2)^2 + 3^2} - \frac{3}{(p+2)^2 + 3^2} = \frac{p+2}{(p+2)^2 + 3^2} - \frac{1 \cdot 3}{(p+2)^2 + 3^2}$$

L'original se trouve à partir des tables de conversion avec $\omega = 1$ et $a = 2$.

$$f(t) = \left(e^{-2 \cdot t} \cdot \cos(3 \cdot t) - e^{-2 \cdot t} \cdot \sin(3 \cdot t)\right) \cdot u(t) = e^{-2 \cdot t} \cdot \left(\cos(3 \cdot t) - \sin(3 \cdot t)\right) \cdot u(t)$$

Il est toujours préférable de réduire cette expression pour qu'elle ne contienne qu'un sinus ou un cosinus unique.
On pose $-1 = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ de manière à faire apparaître une forme trigonométrique connue :

$$\cos(3 \cdot t) - \sin(3 \cdot t) = \cos(3 \cdot t) + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \cdot \sin(3 \cdot t) = \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \left(\sin\varphi \cdot \cos(3 \cdot t) + \sin(3 \cdot t) \cdot \cos\varphi\right) = \frac{\sin(3 \cdot t + \varphi)}{\sin\varphi}$$

L'angle $\varphi = \arctan(\dfrac{1}{-1}) = -\dfrac{\pi}{4}$ donc $\sin(-\dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et

l'original est $f(t) = -\sqrt{2} \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot \sin(3 \cdot t - \dfrac{\pi}{4}) \cdot u(t)$

5.3.6 Transformée avec un pôle réel et une paire de pôles complexes

Si $F(p)$ a la forme générale : $F(p)=\dfrac{N(p)}{(p+p_{p0})\cdot(a\cdot p^2+b\cdot p+c)}$, où le numérateur est d'un degré inférieur à celui du dénominateur.

Si $(a\cdot p^2+b\cdot p+c)$ possède deux racines complexes conjuguées, on écrit alors :

$$F(p)=\frac{A}{p+p_{p0}}+\frac{B\cdot p+C}{a\cdot p^2+b\cdot p+c}$$

Pour déterminer A, la méthode est celle utilisée pour les pôles simples.
Pour déterminer B et C, la méthode consiste à multiplier l'équation par $a\cdot p^2+b\cdot p+c$ et enfin à attribuer à p une des valeurs des racines complexes. On obtient ainsi une équation complexe à deux inconnues à résoudre.

5.3.6.1 Exemple

Recherchons l'original de $F(p)=\dfrac{p+2}{p\cdot(p+1)\cdot(p^2+9)}$. Les pôles complexes sont $\pm 3\cdot j$.

Nous allons donc représenter $\dfrac{p+2}{p\cdot(p+1)\cdot(p^2+9)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p+1}+\dfrac{C\cdot p+D}{p^2+9}$

Pour le calcul de A

$\dfrac{p+2}{(p+1)\cdot(p^2+9)}=A+\dfrac{p\cdot B}{p+1}+\dfrac{p\cdot(C\cdot p+D)}{p^2+9}$, si on impose $p=0$ on a $A=\dfrac{2}{9}$.

Pour le calcul de B

$\dfrac{p+2}{p\cdot(p^2+9)}=(p+1)\cdot\dfrac{A}{p}+p\cdot B+\dfrac{(p+1)\cdot p\cdot(C\cdot p+D)}{p^2+9}$, si on impose $p=-1$ on a $B=-\dfrac{1}{10}$.

Pour le calcul de C et D

$\dfrac{p+2}{p\cdot(p+1)}=(p^2+9)\cdot\dfrac{A}{p}+(p^2+9)\cdot\dfrac{B}{p+1}+C\cdot p+D$, si on impose $p=3\cdot j$

on a $\dfrac{3\cdot j+2}{3\cdot j\cdot(3\cdot j+1)}=C\cdot 3\cdot j+D=\dfrac{3\cdot j+2}{-9+3j}$

on trouve ainsi $(C\cdot 3\cdot j+D)(3\cdot j-9)=3\cdot j+2=-9\cdot C-27\cdot C\cdot j+3\cdot D\cdot j-9\cdot D$
Egalisons les parties réelles entre elles : $2=-9\cdot C-9\cdot D$
Egalisons les parties imaginaires entre elles : $3=-27\cdot C+3\cdot D$ ou $1=-9\cdot C+D$

On trouve $D=-\dfrac{1}{10}$ et $C=-\dfrac{11}{90}$

$$F(p)=\frac{(2/9)}{p}-\frac{(1/10)}{p+1}-\frac{p\cdot(11/90)+(1/10)}{p^2+9}$$

En consultant les tables, on trouve :

$$L^{-1}\left(\frac{(2/9)}{p}\right)=\frac{2}{9}\cdot u(t)\quad L^{-1}\left(\frac{(1/10)}{p+1}\right)=\frac{1}{10}\cdot e^{-t}\cdot u(t)$$

$$L^{-1}\left(-\frac{(11/90)\cdot p}{p^2+9}\right)=-\frac{11}{90}\cdot\cos(3\cdot t)\cdot u(t)\qquad L^{-1}\left(\frac{(1/10)}{p^2+9}\right)=\frac{1}{30}\cdot\sin(3\cdot t)\cdot u(t)$$

$$F(p)=\frac{p+2}{p\cdot(p+1)\cdot(p^2+9)}\ \text{donne}\ f(t)=\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{10}\cdot e^{-t}-\frac{11}{90}\cdot\cos(3\cdot t)-\frac{1}{30}\cdot\sin(3\cdot t)\right)\cdot u(t)$$

On cherche à n'obtenir qu'une fonction de $\sin(3\cdot t)$ et donc

$$\frac{11}{90}\cdot\cos(3\cdot t)+\frac{1}{30}\cdot\sin(3\cdot t)=n\cdot(\sin\varphi\cdot\cos(3\cdot t)+\cos\varphi\cdot\sin(3\cdot t))=n\cdot\sin(3\cdot t+\varphi)$$

Ce qui nous permet de dire que $\tan\varphi=\dfrac{n\cdot\sin\varphi}{n\cdot\cos\varphi}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{11}}=\dfrac{11}{3}$ et on peut en déduire que

$\varphi=\arctan\frac{11}{3}\simeq 74°45'$, puisque $n\cdot\sin\varphi=\frac{11}{90}$ et que $\sin(74°45')=0\cdot 9648$ alors $n=0{,}1267$

$$f(t)=\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{10}\cdot e^{-t}-0{,}1267\cdot\sin(3\cdot t+74°45')\right)\cdot u(t)$$

5.3.6.2 Intérêt de la représentation dans le plan de Laplace

Prenons par exemple $F(p)=\dfrac{A_1}{p+3}+\dfrac{A_2\cdot p+B}{p^2+p+1}$, ses pôles sont -3 et $\dfrac{-1\pm j\cdot\sqrt{3}}{2}$.

Marquons les pôles dans le plan de Laplace, comme illustré à la Figure 61.

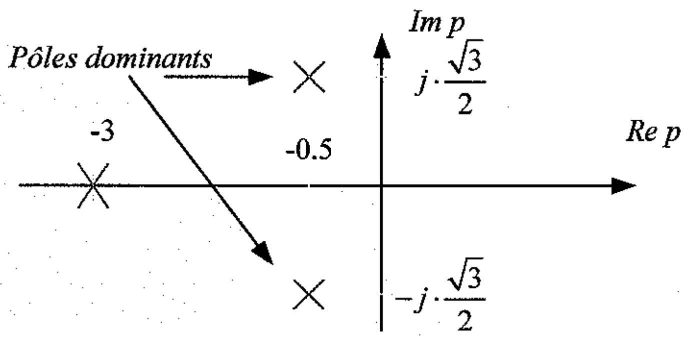


Figure 61 Pôles dominants

L'original est de la forme $f(t)=\left(A_1\cdot e^{-3\cdot t}+K\cdot e^{-\frac{t}{2}}\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)\right)\cdot u(t)$.

Lorsque t est croissant, $e^{-3\cdot t}$ décroît plus vite que $e^{-\frac{t}{2}}$. Or l'exposant des exponentielles est la partie réelle des pôles. Donc plus un pôle est proche de l'axe imaginaire, plus sa réponse est lente. Pour que ce pôle soit dominant, la partie réelle de la racine doit représenter au plus 20% de la partie réelle de toute autre racine, la valeur des résidus des racines doit aussi être prise en compte. Dans le plan de Laplace, les *candidats pôles dominants* se repèrent immédiatement, ce sont les pôles les plus proches de l'axe imaginaire.