

Table des matières

Section 1: Mécanique

Chapitre 1: La physique et les mesures

Cin 1..4

- 1.1. Le système international d'unités
- 1.2. L'analyse dimensionnelle
- 1.3. Les systèmes de coordonnées et les systèmes de référence

Chapitre 2: Eléments de cinématique

Cin 5..15

- 2.1. Le mouvement rectiligne
 - 2.1.1. Le mouvement rectiligne uniforme
 - 2.1.2. Définition de l'accélération
 - 2.1.3. Le mouvement rectiligne uniformément accéléré
 - 2.1.4. Expression de la vitesse en fonction du déplacement
 - 2.1.5. Le mouvement rectiligne quelconque
- 2.2. Le mouvement à deux dimensions
 - 2.2.1. Le mouvement d'un projectile
 - 2.2.2. La décomposition des mouvements
 - 2.2.3. Exercices

Chapitre 3: Eléments de dynamique

Dyn 1..18

- 3.1. Cause et effet
- 3.2. La force gravitationnelle
 - 3.2.1. Les lois de Kepler
 - 3.2.2. La loi de la gravitation universelle
- 3.3. Les lois de Newton
 - 3.3.1. La première loi et les systèmes inertiels
 - 3.3.2. La deuxième loi: le principe fondamental de la dynamique
 - 3.3.3. La troisième loi: la loi de l'action et de la réaction
- 3.4. Les forces de frottement
 - 3.4.1. Introduction
 - 3.4.2. Frottements statique et cinétique
 - 3.4.3. Détermination des coefficients de frottement
 - 3.4.4. Interprétation microscopique des frottements entre deux corps solides

Mat. 1

3.5. Applications

3.5.1 Masse inertie et masse gravitationnelle

3.5.2. Le mouvement dans un référentiel uniformément accéléré

Chapitre 4: Travail et énergie

Ene 1..11

4.1. Travail effectué par une force constante

4.2. Travail effectué par une force variable

4.3. Travail et énergie cinétique

4.4. Energie potentielle

4.4.1. Fonction d'énergie potentielle

4.4.2. Conservation de l'énergie mécanique

4.4.3. Forces non conservatives et théorème de l'énergie cinétique

4.4.4. Forces dérivant d'un potentiel et diagrammes d'énergie

4.4.5. Approximation du potentiel gravitationnel

Chapitre 5: Puissance

Ene 12..14

Chapitre 6: Quantité de mouvement et collisions

Ene 15..22

6.1. Quantité de mouvement et impulsion de force

6.2. Conservation de la quantité de mouvement

6.3. Collisions, lois du choc central

6.3.1. Collisions à une dimension

6.3.2. Collisions à deux dimensions

6.3.3. Les systèmes de masse variable

Chapitre 7: Translation et rotation d'un corps matériel: une analogie

Ene 23..26

Chapitre 8: Mécanique des fluides

8.1. Notions élémentaires sur la constitution de la matière

8.2. Statique des fluides idéaux

8.2.1. La loi fondamentale de l'hydrostatique

8.2.2. Le principe de Pascal

8.2.3. Mesure de la pression

8.2.4. Poussée et principe d'Archimède

8.2.5. Equilibre d'un corps flottant sur un liquide

8.2.6. Exercices récapitulatifs

8.3. Introduction à la dynamique des fluides

8.3.1. Equation de continuité

8.3.2. Théorème de Bernoulli

8.3.3. Applications

8.3.4. L'aérodynamique des voitures

- 8.4. Statique des fluides réels
 - 8.4.1. Tension interfaciale solide/liquide et liquide/liquide
 - 8.4.2. Mesure de la tension superficielle
 - 8.4.3. Phénomènes capillaires
- 8.5. ~~Introduction à la dynamique des fluides réels~~
 - 8.5.1. La viscosité
 - 8.5.2. L'écoulement laminaire dans les tubes et la loi de Poiseuille
 - 8.5.3. L'écoulement turbulent et le nombre de Reynolds
 - 8.5.4. L'extension du théorème de Bernoulli et les pertes de charges

Section 2: La chaleur

Chapitre 1: Généralités

- 1.1. Notion de température et de chaleur
 - 1.1.1. Description macroscopique et microscopique
 - 1.1.2. Equilibre thermique
- 1.2. Echelle de température
 - 1.2.1. Le thermomètre à gaz parfait
 - 1.2.2. L'échelle légale de température
- 1.3. Propriétés des gaz parfaits
 - 1.3.1. L'équation macroscopique des gaz parfaits
 - 1.3.2. Le volume massique et la masse volumique
 - 1.3.3. La densité d'un gaz
 - 1.3.4. La loi de Dalton

Chapitre 2: Théorie cinétique des gaz parfaits

- 2.1. Comparaison des aspects microscopiques et macroscopiques
 - 2.1.1. Energie cinétique moyenne
 - 2.1.2. Calcul de la pression exercée par un gaz parfait
 - 2.1.3. Exercice
- 2.2. Distribution statistique de Maxwell-Boltzmann
 - 2.2.1. Détermination expérimentale
 - 2.2.2. Expression analytique
 - 2.2.2.1. Le modèle de la pelure d'orange
 - 2.2.2.2. La variation de la pression atmosphérique avec l'altitude
- 2.3. Théorème de l'équipartition de l'énergie

Chapitre 3: La dilatation des corps

- 3.1. Le modèle cristallin
- 3.2. De l'état solide vers l'état liquide, puis vers l'état gazeux

- 3.3. La dilatation: aspects macroscopiques
 - 3.3.1. Les solides homogènes
 - 3.3.2. Les liquides
 - 3.3.3. Les gaz parfaits

Chapitre 4: La thermométrie

- 4.1. Les thermomètres à dilatation
- 4.2. Les thermomètres à vapeur saturante
- 4.3. Le thermomètre à résistance
- 4.4. L'effet thermoélectrique et le thermocouple
 - 4.4.1. La force électromotrice de Peltier
 - 4.4.2. L'effet Thomson
 - 4.4.3. L'effet Seebeck

Chapitre 5: Changement d'état des corps purs

- 5.1. Fusion et solidification
- 5.2. Vaporisation et condensation
- 5.3. Evaporation en phase gazeuse et ébullition
- 5.4. La calorimétrie
 - 5.4.1. Chaleur massique et capacité calorifique
 - 5.4.2. Capacité calorifique d'un gaz parfait monoatomique à V ou p constant
 - 5.4.3. Valeur en eau d'un calorimètre
 - 5.4.4. Mesure du C_p d'un solide
 - 5.4.5. Mesure du C_p d'un liquide
- 5.5. Diagrammes d'états pV et pT
 - 5.5.1. Diagramme pT: courbes de fusion, de vaporisation et de sublimation
 - 5.5.2. Diagramme pV
 - 5.5.2.1. Isothermes de fusion
 - 5.5.2.2. Isothermes de vaporisation
 - 5.5.2.3. Courbe enveloppe

Chapitre 6: Les gaz réels

- 6.1. L'équation de Van der Waals
- 6.2. Expression du facteur de compressibilité
- 6.3. Equation empirique du viriel d'état

Chapitre 7: Les transferts de chaleur

- 7.1. Transferts par conduction
 - 7.1.1. Coefficient de conductibilité thermique
 - 7.1.2. Equation de conduction thermique ou équation de la chaleur

- 7.2. Transferts par convection
 - 7.2.1. Coefficient de convection thermique
 - 7.2.2. Convection en régime stationnaire
- 7.3. Transferts par rayonnement
 - 7.3.1. Le corps noir
 - 7.3.2. Émittance et luminance énergétique
 - 7.3.3. Loi du rayonnement de Planck

Section 3: Les phénomènes périodiques

Chapitre 1: Généralités

Chapitre 2: Composition de phénomènes périodiques sinusoïdaux

- 2.1. Phénomènes périodiques de même fréquence
- 2.2. Phénomènes périodiques perpendiculaires
 - 2.2.1. De même fréquence
 - 2.2.2. De fréquences différentes: les figures de Lissajous
- 2.3. Illustrations
 - 2.3.1. Le pendule simple
 - 2.3.2. Exercice
 - 2.3.3. L'oscillateur harmonique simple
 - 2.3.4. Cas du ressort vertical
 - 2.3.5. L'oscillateur harmonique amorti

Section 1: Mécanique

Chapitre 1: La physique et les mesures

1.1 Le système international d'unités

Les trois quantités fondamentales de la mécanique sont la masse (de symbole **M**), la longueur (**L**) et le temps (**T**). Le système international d'unités (**SI**) a établi leurs unités respectives comme étant le kilogramme (*kg*), le mètre (*m*) et la seconde (*s*).

Le système international d'unités est basé, d'une part, sur ces trois unités (composant précédemment le système *MKS*) et, d'autre part, sur le Kelvin (*K*, unité de température), l'ampère (*A*, unité d'intensité de courant électrique), la candela (*cd*, unité d'intensité lumineuse) et la mole (*mol*, unité de quantité de matière). Dans ce système, l'unité de force est une unité dérivée appelée le Newton (*N*, cf infra). Symboliquement, nous pouvons écrire $1\text{N}=1\text{kg}\cdot 1\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, c'est la force conférant à une masse de 1kg une accélération de $1\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

- Dans la pratique, d'autres systèmes d'unités sont encore parfois utilisés. Citons:
- le système *CGS* pour lequel l'unité de masse est le gramme ($1\text{g}=10^{-3}\text{kg}$), l'unité de longueur le centimètre ($1\text{cm}=10^{-2}\text{m}$) et l'unité de temps la seconde (*s*). L'unité de force est alors le dyne: $1\text{dyne}=1\text{g}\cdot 1\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}=10^{-5}\text{N}$.
 - le système *MKS* défini à partir des unités de masse (*kg*), de longueur (*m*) et de force: le kilogramme-force (*kgf* ou *kg**), défini comme étant la force d'attraction gravitationnelle s'exerçant sur une masse de 1kg en un lieu où l'accélération de la pesanteur (cf infra) vaut $g=9,80665\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Les préfixes utilisés pour désigner les multiples et les sous-multiples décimaux des unités sont les suivants:

Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur
Exa	E	10^{18}	Déca	d	10^1
Peta	P	10^{15}	Centi	c	10^{-2}
Téra	T	10^{12}	Milli	m	10^{-3}
Giga	G	10^9	Micro	μ	10^{-6}
Méga	M	10^6	Nano	n	10^{-9}
Kilo	k	10^3	Pico	p	10^{-12}
Hecto	h	10^2	Femto	f	10^{-15}
Déca	da	10^1	Atto	a	10^{-18}

Par exemple, le nanomètre (nm) est égal à $10^{-9}m$, la milliseconde (ms) à $10^{-3}s$, le mégajoule (MJ , cf infra) à 10^6J , ...

Notons que certaines unités encore couramment utilisées telles que l'angström ($1\text{\AA} = 10^{-10}m$) ou l'are ($1\text{are} = 10^2m^2$) ne répondent pas à cette classification.

1.2 L'analyse dimensionnelle

La vitesse v se mesurant en mètres par seconde ($m \cdot s^{-1}$), il convient, pour l'obtenir, de diviser une longueur (symbolisée par la lettre L) par un temps (T). Nous dirons dès lors que ses dimensions sont $[v] = L/T = L \cdot T^{-1}$.

De même, dans le système international d'unités, l'unité d'aire est le m^2 et ses dimensions sont L^2 , l'unité de volume est le m^3 et ses dimensions L^3 , l'unité d'accélération (cf infra) est le $m \cdot s^{-2}$ et ses dimensions $L \cdot T^{-2}$.

Exercice: déterminer l'unité de masse volumique ρ , ou masse par unité de volume, dans le système international d'unités et les dimensions de cette grandeur.

Rép: puisque $[\rho] = M \cdot L^{-3}$, l'unité de masse volumique est le $kg \cdot m^{-3}$.

Application: une particule de masse m décrit un mouvement circulaire uniforme si sa trajectoire est un cercle parcouru à vitesse scalaire v constante. Le vecteur vitesse \vec{v} est tangent à la trajectoire. La particule dispose d'une accélération radiale (*centripète*) a_r , mais n'a pas d'accélération tangentielle a_t (car v est constante).

Supposons que l'accélération radiale soit proportionnelle à une puissance de r , notée r^n , et à une puissance de v , notée v^m . Déterminer ces puissances par analyse dimensionnelle.

Rép: par hypothèse, $a_r = k r^n v^m$ où k est une constante, sans dimension. Nous obtenons: $[a_r] = L T^{-2} = L^n (L T^{-1})^m$. Dès lors, $n+m=1$ et $-m=-2$, soit $n=-1$ et $m=2$. Nous pouvons donc écrire que l'accélération radiale de la particule est proportionnelle à v^2/r . La constante de proportionnalité k étant égale à 1 (cf infra), nous obtenons $a_r = v^2/r$.

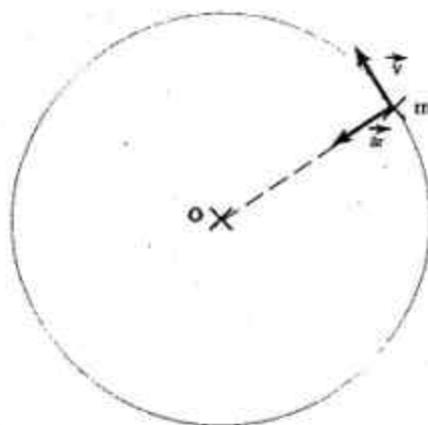


Figure 1

$$a = k r^n v^m$$

1.3 Les systèmes de coordonnées et les systèmes de référence

Pour localiser la position d'un corps matériel ponctuel (*ou point matériel*) dans le plan ou dans l'espace, on utilise un système de coordonnées.

Lorsque le système est spécifique à l'étude du corps (*cf infra*), on parle alors de système de référence lié au corps. Dans un même problème physique doté d'un système de coordonnées unique et mettant en jeu plusieurs corps matériels, chaque corps peut présenter son propre système de référence.

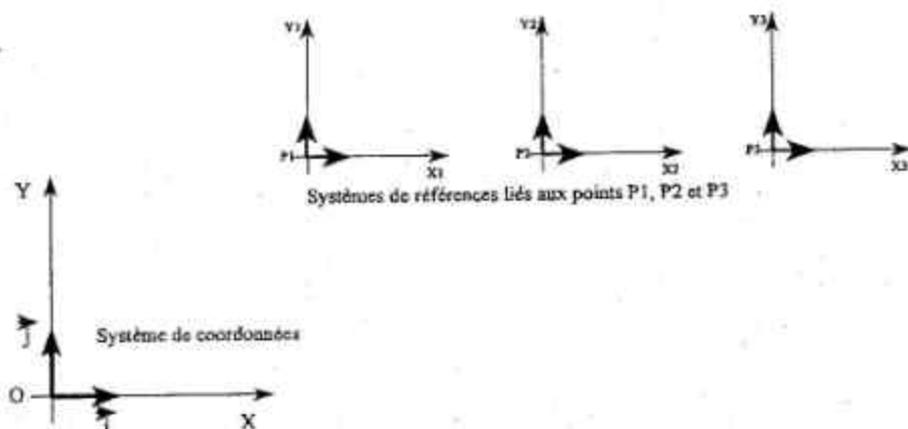


Figure 2a

Un système de coordonnées ou de référence comprend:

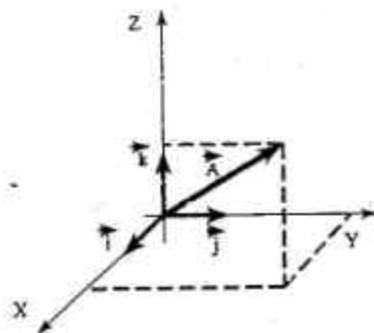
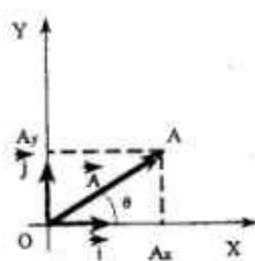


Figure 2b

- un point de référence O appelé origine du système d'axes
- un système d'axes orientés, généralement muni d'un repère orthonormé que nous noterons (O, \vec{i}, \vec{j}) dans le plan et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans l'espace.

Rappelons que, dans un repère orthonormé, les vecteurs de base sont de norme (ou grandeur) égale à 1: $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ et sont orthogonaux 2 à 2: $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$. De plus, dans l'espace, le repère est choisi *dextrogyre* (cf règle du tire-bouchon): $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$.

Illustrons la décomposition d'un vecteur dans le plan: $\vec{OA} = \vec{A}_x\vec{i} + A_y\vec{j}$. La norme du vecteur vaut $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$.

A_x et A_y sont les composantes scalaires (ou *rectangulaires*) du vecteur \vec{A} :
$$\begin{cases} A_x = |\vec{A}| \cos \theta \\ A_y = |\vec{A}| \sin \theta \end{cases}$$

(A_x, A_y) sont les coordonnées cartésiennes du point A dans le système de coordonnées illustré à la figure 2. $(|\vec{OA}|, \theta)$ sont ses coordonnées polaires dans ce système.

Exercice: Un sous-marin plonge suivant un angle de 30° par rapport à la surface et parcourt 50m en ligne droite dans un plan vertical. A quelle profondeur se trouve-t-il alors?

Rép: Prenons, dans le plan vertical OXY, le système d'axes suivant, l'origine coïncidant avec la position du sous-marin au moment de la plongée.

Le vecteur déplacement a une norme égale à $|\vec{A}| = 50 \text{ m}$.
Le sous-marin se trouve à une profondeur $A_y = |\vec{A}| \sin 30^\circ = 25 \text{ m}$.
Il a parcouru horizontalement $A_x = |\vec{A}| \cos 30^\circ = 43 \text{ m}$.

Notons que le vecteur déplacement \vec{A} ne coïnciderait pas avec la trajectoire réellement suivie si le plongeur se déplaçait de O à A suivant la trajectoire courbe 2. Sa construction ne nécessite que les *seules* positions initiale O et finale A du plongeur.

Le déplacement d'un corps est donc *indépendant* de la trajectoire réellement suivie par le corps et la distance parcourue, qui correspond à la longueur du trajet, ne coïncide généralement pas avec la norme du vecteur déplacement.

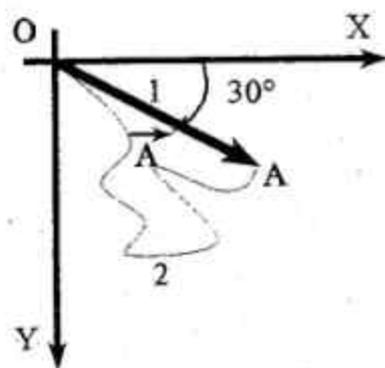


Figure 3

Chapitre 2: Eléments de cinématique

La **cinématique** décrit et caractérise le mouvement des corps en fonction du temps. Elle ne se préoccupe pas de la relation entre le mouvement et les causes qui peuvent le produire, objectif de la dynamique. Cinématique et **dynamique** appartiennent à la mécanique, qui comprend encore la **statique**, ou étude de l'état de repos des corps.

Le cadre de ce chapitre est la cinématique du point matériel, ou particule.

2.1 Le mouvement rectiligne

Le mouvement d'une particule est qualifié de rectiligne si la trajectoire suivie par cette particule est un segment de droite.

Supposons que le déplacement ait lieu sur l'axe OX , du point P au point Q . Notons x_0 la position de la particule qui passe au point P au temps t_0 et x_1 sa position au point Q , atteint au temps t_1 .

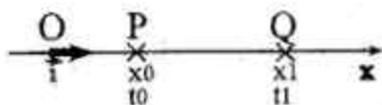


Figure 4

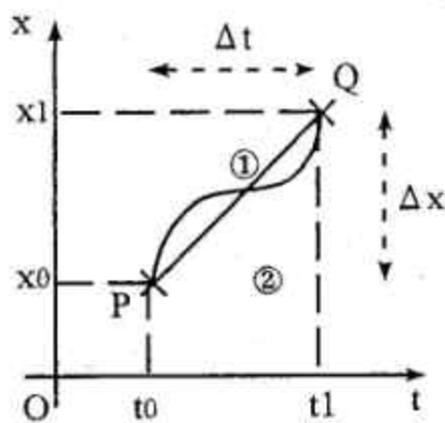


Figure 5

Bien que le mouvement soit unidimensionnel, il est intéressant de tracer le **graphique position-temps** que décrit la particule qui se déplace suivant l'axe OX . Il est alors aisé de différencier les courbes ① et ②.

Durant l'intervalle de temps $\Delta t = t_1 - t_0$, le déplacement de la particule est $\Delta x = x_1 - x_0$. Le mouvement de la particule étant rectiligne dans le cas ①, mais également dans le cas ② (eh! oui), le déplacement suivant l'axe OX est donc spécifié par la seule valeur **algébrique** Δx ,

égale à la différence entre les abscisses des positions finale et initiale. Il convient dès lors de ne pas confondre le déplacement avec la distance réellement parcourue par la particule. Si la particule revient à son point de départ, son déplacement est nul bien que la distance parcourue soit évidemment strictement positive.

Le rapport $\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$ du déplacement Δx par le temps Δt mis à le parcourir définit la **vitesse (scalaire) moyenne** $\langle v \rangle$ de la particule. Sur le graphique position-temps, $\langle v \rangle$ est la pente de la droite joignant les points P et Q. Notons que les dimensions de $\langle v \rangle$ sont $[\langle v \rangle] = L \cdot T^{-1}$. Il s'agit donc bien d'une vitesse, s'exprimant en $m \cdot s^{-1}$ dans le système international.

Prenant par hypothèse $\Delta t > 0$, la vitesse moyenne est négative s'il en est ainsi du déplacement $\Delta x < 0$ c'est à dire si $x_1 < x_0$. Elle est positive lorsque $\Delta x > 0$.

Le vecteur $\langle \vec{v} \rangle = \langle v \rangle \vec{i} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i}$ est appelé **vecteur vitesse moyenne**. Ce vecteur est dirigé dans

la direction et dans le sens du mouvement.

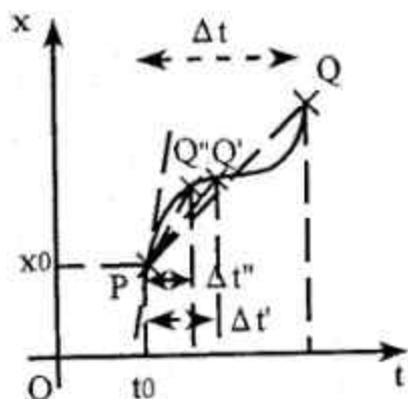


Figure 6

Lorsque le graphique position-temps de la figure 5 est donné par la courbe ② plutôt que par le segment de droite ①, la vitesse moyenne $\langle v \rangle$ ne décrit qu'imparfaitement la variation de la position par rapport au temps, au voisinage du point P.

On rend d'autant mieux compte de cette variation que Δt est petit (*considérer, par exemple, $\Delta t'$ et $\Delta t''$ correspondant aux segments de droite PQ' et PQ''*). La limite des pentes de sécantes PQ , PQ' , PQ'' , ... est la pente de la **tangente** à la courbe au point P. Il s'agit de la **vitesse (scalaire instantanée)** au point P considéré.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{Nous la notons}$$

$$\text{également } v = \frac{dx}{dt} \quad \text{ou } v = x'(t)$$

lorsqu'aucune ambiguïté n'existe quant à la nature de la variable indépendante t (*dans le cas présent*).

Le vecteur $\vec{v} = v \vec{i} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i}$ est appelé **vecteur vitesse (instantanée)**. Puisque, par

convention, $\Delta t > 0$, ce vecteur est dirigé dans la direction et dans le sens du mouvement.

Exercice: Une particule se déplace suivant l'axe OX. Sachant que sa coordonnée x varie en fonction du temps selon $x(t) = -4t + 2t^2$,

- (a) tracer le graphique position(m)-temps(s) lorsque $0 \leq t \leq 3$ s.
 (b) quels sont le déplacement et la vitesse moyenne de la particule durant les intervalles de temps $t=0$ à $t=1$ s et $t=1$ s à $t=3$ s?
 (c) quelle est la vitesse instantanée de la particule à $t=2$ s?

2.1.1 Le mouvement rectiligne uniforme (MRU)

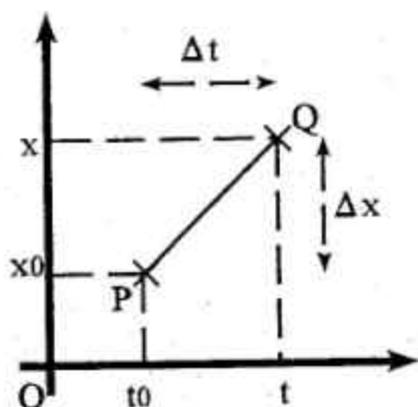


Figure 7

Dans un mouvement uniforme, le rapport de l'espace parcouru Δx par le temps Δt mis à le parcourir est constant, quel que soit l'intervalle de temps considéré: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = cte$. Les vitesses

moyenne $\langle v \rangle$ et instantanée v de la particule sont égales à cette constante et le graphique position-temps est donné par un segment de droite. La vitesse de la particule est la pente de ce segment de droite.

Puisque $\Delta x = v\Delta t$, nous pouvons écrire que: $x - x_0 = v(t - t_0)$.

Déclenchons le chronomètre lorsque le mobile passe en P. Dès lors $t_0 = 0$ et $x = x_0 + vt$. Les graphiques position-temps et vitesse-temps de la particule sont alors donnés par les figures suivantes, lorsque $v > 0$:

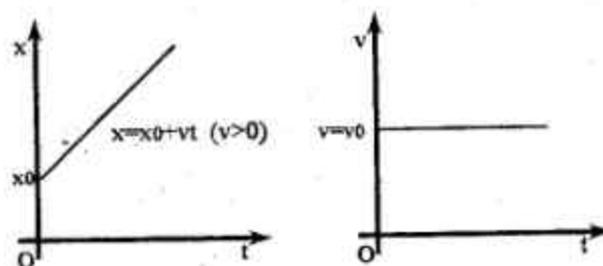


Figure 8a

Lorsque $v < 0$, les graphiques vitesse-temps et accélération-temps sont donnés par:

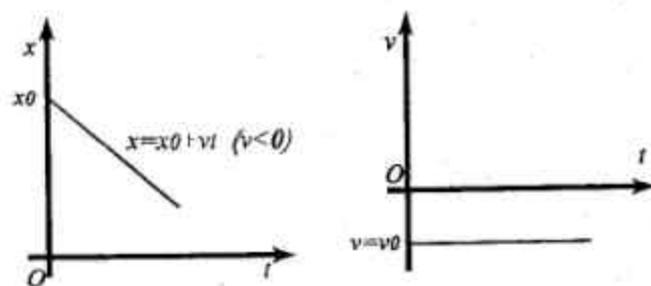


Figure 8b

2.1.2 Définition de l'accélération

Supposons que le déplacement ait lieu sur l'axe OX, du point P au point Q. Notons x_0 la position de la particule qui passe au point P au temps t_0 et v_0 sa vitesse. Notons x_1 la position de la particule au point Q, atteint au temps t_1 , et v_1 sa vitesse.

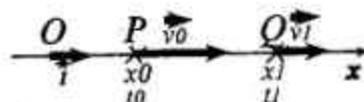


Figure 9

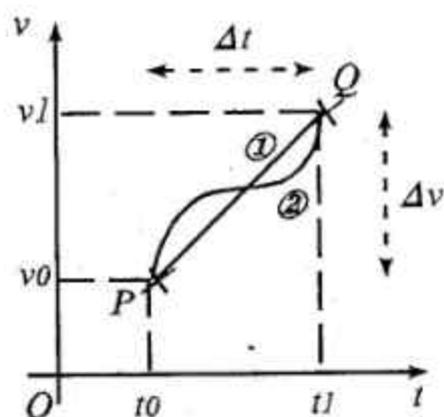


Figure 10

Supposons que la vitesse de la particule varie en fonction du temps. Nous dirons dans ce cas que son **accélération** n'est pas constante et nous définirons (*cf supra*):

- l'accélération (*scalaire*) moyenne

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- le vecteur accélération moyenne

$$\langle \vec{a} \rangle = \langle a \rangle \vec{i} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \vec{i}$$

- l'accélération (*scalaire instantanée*)

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t)$$

- le vecteur accélération (*instantanée*)

$$\vec{a} = a \vec{i} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \vec{i} = \frac{dv}{dt} \vec{i} = v'(t) \vec{i}$$

Remarquons que l'accélération moyenne est donnée, sur le graphique vitesse-temps, par la pente de la sécante ① joignant les points P et Q.

2.1.3 Le mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

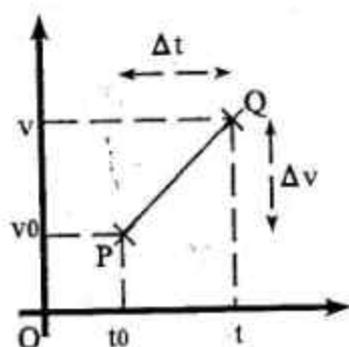


Figure 11

Dans un mouvement rectiligne uniformément accéléré, le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{cte}$ est

constant, quel que soit l'intervalle de temps considéré. Les accélérations moyenne $\langle a \rangle$ et instantanée a de la particule sont égales à cette constante et le graphique vitesse-temps est donné par un segment de droite. L'accélération de la particule est la pente de ce segment de droite.

Puisque $\Delta v = a\Delta t$, nous pouvons écrire que: $v - v_0 = a(t - t_0)$.

Déclenchons le chronomètre lorsque le mobile passe en P. Dès lors $t_0 = 0$ et $v = v_0 + at$. Les graphiques vitesse-temps et accélération-temps de la particule sont alors donnés par les figures suivantes, lorsque $a > 0$:

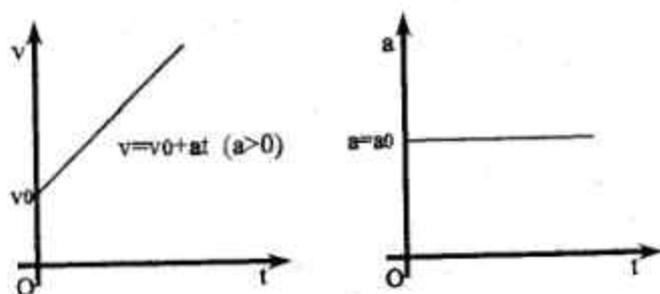


Figure 12a

En supposant que $\Delta t > 0$, remarquons que $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ a le même signe que Δv . Lorsque $a < 0$,

les graphiques vitesse-temps et accélération-temps donnés par:

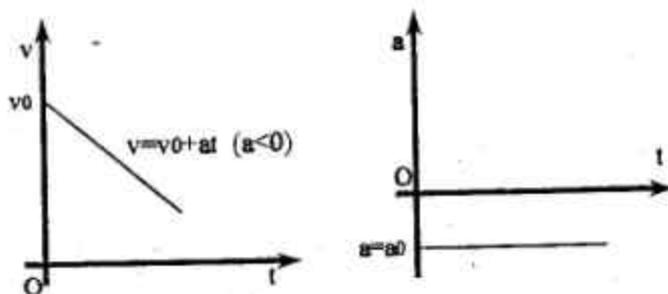
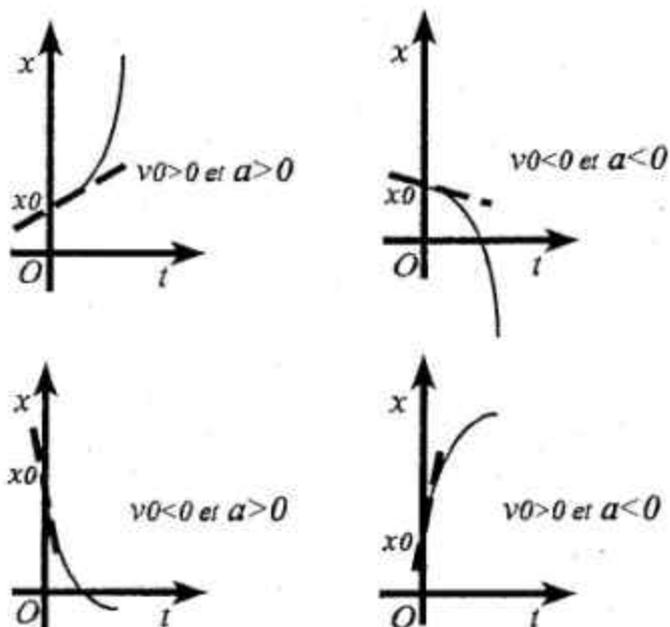


Figure 12b

Rappelons que $v = \frac{dx}{dt}$. Dès lors, $x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt$, soit:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t-t_0)] dt = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2$$

En posant $t_0=0$, nous obtenons: $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ dont le graphique position-temps est une parabole.



Figures 13

Les différents types de graphiques position-temps d'un MRUA sont les suivants:

Sur ces graphiques, nous avons représenté en pointillé la tangente à la courbe $x(t)$ en $t=0$.

La pente de cette tangente vaut v_0 .

2.1.4 Expression de la vitesse en fonction du déplacement

Puisque la vitesse d'un MRUA varie linéairement dans le temps $v = v_0 + at$ ($a = ctte$) (1), la vitesse moyenne entre les instants 0 et t est égale à la moyenne arithmétique des vitesses aux instants initiaux ($t=0$) et finaux (t): $\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_0 + v}{2}$. En $t=0$, la particule se trouve à la position

initiale x_0 . Dès lors, $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t}$ et $x = x_0 + \frac{v_0 + v}{2}t$ (2). Remarquons qu'en substituant $v = v_0 + at$

dans (2), nous retrouvons l'égalité $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Eliminons t de (2) en l'explicitant dans (1):

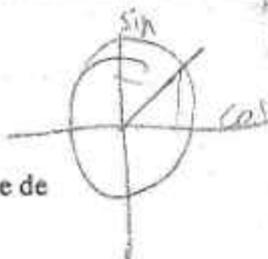
$t = \frac{v - v_0}{a}$. Nous obtenons: $x = x_0 + \frac{v - v_0}{2a} (v + v_0)$ (3) et, dès lors, $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ (4).

Illustration: Calculer l'accélération moyenne de la balle durant le mouvement d'un lanceur de base-ball, sachant que la balle quitte la main du lanceur avec une vitesse de 44ms^{-1} après avoir effectué une trajectoire rectiligne d'une longueur de 3,5m.

Rép: $a = \frac{v^2}{2x} = 2,8 \cdot 10^2 \text{ms}^{-2}$ ($v_0 = x_0 = 0$)

Résumé: tableau récapitulatif des MRU et MRUA

MRU	$v = v_0$ ($t_0 = 0$, par convention)
	$x = x_0 + vt$
MRUA	$a = a_0$
	$v = v_0 + at$
	$x = x_0 + v_0 t + at^2/2$
	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$



Exercice: Un fabricant d'automobiles annonce que l'un de ses luxueux modèles de voiture de sport a une accélération uniforme qui lui permet de passer de 0 à 144km/h en 8s.

- Déterminer l'accélération de la voiture.
- Déterminer la distance parcourue par la voiture au cours des huit premières secondes.
- Quelle vitesse la voiture a-t-elle atteinte après 10s de mouvement, à supposer que son accélération reste constante?

Rép: a) $a=5\text{m/s}^2$, b) $\Delta x=160\text{m}$, c) $v(10)=50\text{m/s}$.

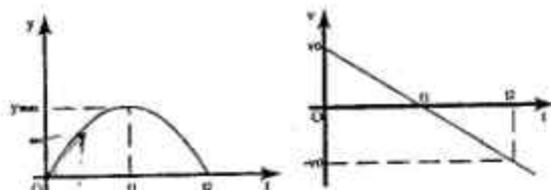
Application: Mouvement d'un corps en chute libre (en supposant que la résistance de l'air est négligeable).

Quelle que soit sa vitesse initiale, tout corps qui se déplace librement sous l'action de la pesanteur subit une accélération vers le bas égale à l'accélération de pesanteur g (cf infra), constante en première approximation. Le mouvement du corps est un MRUA suivant l'axe OY, que le corps soit initialement lancé vers le haut ou non.

Choisissons l'axe OY dirigé vers le haut. Le vecteur accélération du corps est alors égal à $\vec{a} = -g\vec{j}$. En $t_0=0$ et $y_0=0$,

lançons le corps vers le haut avec une vitesse v_0 (positive, étant donné le sens de l'axe OY). Les équations du mouvement

du corps sont:
$$\begin{cases} v = v_0 - gt \\ y = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$



Figures 14

Le corps atteindra son point le plus haut lorsque $v=0$, soit en $t_1 = \frac{v_0}{g}$. La hauteur atteinte

sera alors égale à $y_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g}$. Le corps repassera par sa position initiale lorsque $y=0$, soit en

$$t_2 = \frac{2v_0}{g}$$

2.1.5 Le mouvement rectiligne quelconque

Dans un mouvement rectiligne quelconque, l'accélération $a = \frac{dv}{dt}$ n'est pas constante, mais

est fonction du temps. La vitesse $v(t)$ s'obtient par intégration: $v = v_0 + \int_{t_0}^t a dt$. De même, puisque

$v = \frac{dx}{dt}$, la position $x(t)$ s'obtient par intégration de la vitesse: $x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt$.

2.2 Le mouvement à deux dimensions

La description du mouvement d'un objet ponctuel dans le plan OXY nécessite la définition vectorielle du déplacement, de la vitesse et de l'accélération:

$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \\ \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \end{cases}$$

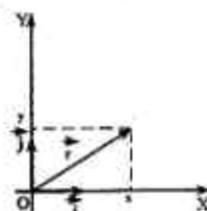


Figure 15

Des équations cinématiques analogues à celles décrivant un mouvement unidimensionnel sont obtenues en *décomposant* le mouvement suivant les axes de référence.

2.2.1 Le mouvement d'un projectile

Observons le mouvement d'un projectile (*un ballon, une balle de fusil, ...*) dans le plan vertical OXY. Doté d'une vitesse initiale quelconque, il suit une trajectoire courbe.

Choisissons l'axe OY dirigé vers le haut. Au temps $t=0$, le projectile est lancé de l'origine du système d'axe ($x_0=y_0=t_0=0$). En l'absence de résistance de l'air et en supposant qu l'accélération de pesanteur g est constante, le mouvement du projectile se décompose en un MRU suivant OX et un MRUA suivant OY. Les équations du mouvement du corps sont:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ x = v_{0x}t \end{cases} \quad \begin{cases} v_y = v_{0y} - gt \\ y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire dans le plan OXY s'obtient en éliminant t des équations

donnant la position du projectile: $t = \frac{x}{v_{0x}}$, soit: $y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2$. Le mouvement est parabolique.

Calculons la hauteur maximale atteinte par le projectile y_{max} et sa portée R .

En (x_{max}, y_{max}) , la tangente à la trajectoire est horizontale: $y'=0$. Dès lors, l'abscisse du maximum est:

$$x_{max} = \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

et la hauteur maximale est égale

à: $y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$. La portée R est obtenue pour $y=0$ soit $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$. En l'absence de résistance

de l'air, cette portée est maximale lorsque $\sin 2\theta=1$, soit pour $\theta=45^\circ$. Notons que y_{max} et R sont en $1/g$ (ce qui explique les sauts phénoménaux d'Haddock et des Dupondt sur la lune!).

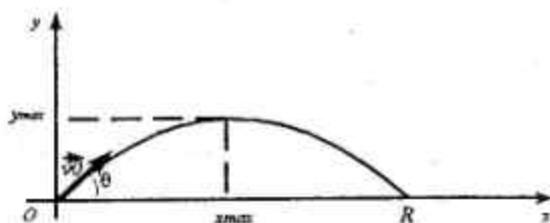


Figure 16

2.2.2 La décomposition des mouvements

En supposant que les frottements dus à la résistance de l'air sont négligeables, nous constatons expérimentalement que deux balles lâchées, l'une verticalement à vitesse initiale nulle, l'autre avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$ ($v_{0x} \neq 0$), arriveront au sol en même temps.

En vue de comprendre le principe physique sous-jacent à cette observation, considérons le mouvement d'un projectile lancé d'une hauteur initiale y_0 à vitesse initiale non nulle $\vec{v} = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} = v_0 \cos \theta \vec{i} + v_0 \sin \theta \vec{j}$. Les équations du mouvement (MRU suivant OX et MRUA suivant OY) du projectile sont respectivement:

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ v_x = v_{0x} \end{cases} \quad \begin{cases} y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \\ v_y = v_{0y} - gt \\ a_y = -g \end{cases}$$

La hauteur maximale y_{max} est atteinte lorsque

$v_y=0$, soit en $t_1 = \frac{v_{0y}}{g}$. Dès lors, $y_{max} = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}$ et

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

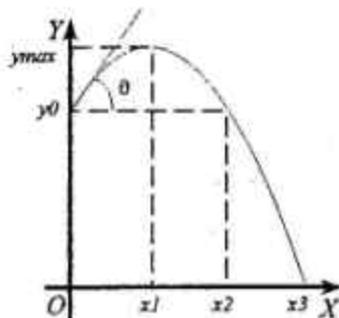


Figure 17

Le projectile repasse à la hauteur y_0 lorsque $y=y_0$, soit en $t_2 = \frac{2v_{0y}}{g}$. La portée est alors

égale à (cf supra): $x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = 2x_1$.

Le projectile atteint le sol lorsque $y=y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 = 0$ (résoudre cette équation du second degré en x pour obtenir l'abscisse d'impact x_3).

Supposons maintenant que $v_{0y}=0$. Les équations du mouvement sont

alors: $\begin{cases} x = v_{0x}t \\ v_x = v_{0x} \end{cases}$ $\begin{cases} y = y_0 - \frac{gt^2}{2} \\ v_y = -gt \\ a_y = -g \end{cases}$ et nous constatons que le temps $t_{sol} = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ mis pour atteindre

le sol est indépendant de v_{0x} . Reprenons dès lors l'exemple des deux balles. Seule la portée sera

fonction de v_{0x} : $y(t_3)=0=y_0 - \frac{gt^2}{2}$, soit $x=v_{0x}\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$.

Ces deux exemples illustrent le **principe de la décomposition des mouvements**: les mouvements s'effectuent indépendamment les uns des autres suivant OX (MRU) et OY (MRUA). A tout instant t , le vecteur position $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ est tel que ses composantes $x(t)$ et $y(t)$ sont indépendantes les unes des autres.

2.2.3 Exercices

1. Un avion de sauvetage largue des vivres à un équipage d'explorateurs en détresse au coeur de l'Alaska. Si l'avion vole horizontalement à 40ms^{-1} et à 100m d'altitude, à quelle distance horizontale du point de larguage le paquet tombe-t-il?

Rép: $x=180\text{m}$ après $t=4,51\text{s}$.

2. Un skieur prend son élan avant d'exécuter un saut. Il quitte la piste horizontalement à 25ms^{-1} . La pente qu'il survole est inclinée de 35° . A quel endroit le skieur atterrit-il?

Rép: $x=89,3\text{m}$, $y=-62,5\text{m}$ après $t=3,57\text{s}$.

3. Un ballon monte à la vitesse de 12ms^{-1} à une hauteur de 80m au-dessus du sol lorsqu'on laisse tomber un sac de lest. Combien de temps mettra ce sac pour atteindre le sol?

Rép: $5,36\text{s}$.